Lösungen zum 12. Übungsblatt Optimierungstheorie SS 09

47. Aufgabe

Wir setzen $x = x^+ - x^-, x^+, x^- \in \mathbb{R}^n,\ x^+, x^- \geq 0$,

$$\tilde{f}(x^+, x^-) := f(x^+ - x^-), \qquad \tilde{g}(x^+, x^-) := g(x^+ - x^-).$$

Da f und g_i $(i = 1, \ldots, m)$ konvex sind, ist

$$(\widetilde{KP}) \qquad \boxed{\begin{array}{rcl} \tilde{f}(x^+, x^-) & = & \min \\ \tilde{g}(x^+, x^-) & \leq & 0 \\ & x^+, x^- \geq 0 & \end{array}}$$

ein zu (KP) äquivalentes konvexes Programm.

$$\begin{array}{ll} & (\widetilde{SB}) \ \text{ für } (\widetilde{KP}) : \exists (x^+, x^-) \geq 0 : \tilde{g}(x^+, x^-) < 0 \\ \iff & (SB) \ \text{ für } (KP) : \exists x \in \mathbb{R}^n : g(x) < 0. \end{array}$$

Der Sattelpunktsatz für $(\widetilde{KP})$:

(i) Ist $((x^0)^+, (x^0)^-, u^0)$ Sattelpunkt von $\tilde{\Phi}$ in $\{(x^+, x^-) \geq 0, u \geq 0\}$, so ist $((x^0)^+, (x^0)^-)$ eine Lösung von $(\widetilde{KP})$.

(ii) Ist $((x^0)^+, (x^0)^-)$ eine Lösung von $(\widetilde{KP})$ und gilt $(\widetilde{SB})$, so ex. ein $u^0 \geq 0$ derart, dass $((x^0)^+, (x^0)^-, u^0)$ Sattelpunkt von $\tilde{\Phi}$ in $\{(x^+, x^-) \geq 0, u \geq 0\}$ ist.

Es ist $((x^0)^+, (x^0)^-, u^0)$ Sattelpunkt von $\tilde{\Phi}$ in $\{(x^+, x^-) \geq 0, u \geq 0\}$

$$\begin{array}{ll} \iff & \tilde{\Phi}((x^0)^+, (x^0)^-, u) \leq \tilde{\Phi}((x^0)^+, (x^0)^-, u^0) \leq \tilde{\Phi}(x^+, x^-, u^0), \qquad \forall x^+, x^-, u \geq 0 \\ \overset{x=x^+-x^-}{\iff} & \Phi(x^0, u) \leq \Phi(x^0, u^0) \leq \Phi(x, u^0), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, u \geq 0 \\ \iff & (x^0, u^0) \text{ ist Sattelpunkt von } \Phi \text{ in } \{x \in \mathbb{R}^n, u \geq 0\}. \end{array}$$

Als Ergebnis erhalten wir den folgenden Sattelpunktsatz:

(i) Ist (x^0, u^0) Sattelpunkt von Φ in $\{x \in \mathbb{R}^n, u \geq 0\}$, so ist (x^0) eine Lösung von (KP).

(ii) Ist (x^0) eine Lösung von (KP) und gilt (SB), so ex. ein $u^0 \geq 0$ derart, dass (x^0, u^0) Sattelpunkt von Φ in $\{x \in \mathbb{R}^n, u \geq 0\}$ ist.

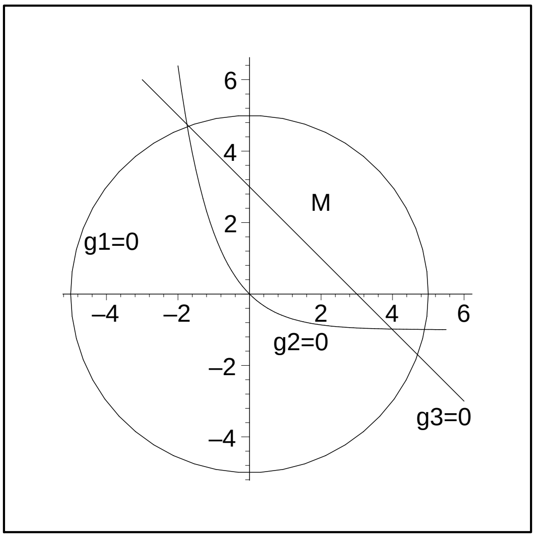
48. Aufgabe
Für die Zielfunktion $f(x,y) = 2(x-6)^2 + (y-6)^2$ und die Funktionen

$$g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 25, \qquad g_2(x,y) = e^{-x} - y - 1, \qquad g_3(x,y) = -x - y + 3$$

der Nebenbedingungen gilt:

Funktion	f	g_1	g_2	g_3
Gradient	$2\begin{pmatrix} 2x-12 \\ y-6 \end{pmatrix}$	$2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -e^{-x} \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Hesse-Matrix	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die auftretenden Matrizen sind offensichtlich alle positiv semi-definit. Also sind alle Funktionen konvex und es liegt ein konvexes Programm vor.
Offenbar ist M kompakt, also existiert eine Lösung (x^0, y^0) von (KP). Für alle $(x,y) \in M$ gilt



$$\nabla f(x,y) = 2\,(2x-12, y-6) < 0. \qquad (*)$$

Die Slater–Bedingung ist erfüllt, da z.B. der Punkt $(2,2)$ im Inneren der Nebenbedingungsmenge M liegt. Der Satz über die lokalen Kuhn–Tucker Bedingungen besagt nun:

$$\left.\begin{array}{l} (x^0,y^0) \geq 0 \\ \text{ist Lösung} \\ \text{von (KP)} \end{array}\right\} \iff \exists u^0 \geq 0 : \left\{\begin{array}{ll} (i) & w := \nabla f(x^0,y^0) + \sum_{j=1}^3 u_j^0 \nabla g_j(x^0,y^0) \geq 0,\ \langle w, (x^0,y^0)\rangle = 0, \\ (ii) & g(x^0,y^0) \leq 0, \qquad \langle g(x^0,y^0), u^0\rangle = 0 \end{array}\right.$$

Aus der ersten Bedingung ($w \geq 0$) und $(*)$ folgt

$$0 > \nabla f(x^0,y^0) \geq -\sum_{j=1}^{3} u_j^0 \nabla g_j(x^0,y^0) = -\sum_{\substack{j=1 \\ g_j(x^0,y^0)=0}}^{3} u_j^0 \nabla g_j(x^0,y^0),$$

wobei die letzte Gleichung wegen $\langle g(x^0,y^0), u^0\rangle = 0$ gilt. Diese Ungleichung kann nur erfüllt sein, wenn $g_1(x^0,y^0) = 0$ ist, da die anderen Gradienten der Nebenbedingungen auf M überall negativ sind. Aus der Abbildung liest man ab, dass dann $g_2(x^0,y^0) < 0$, $g_3(x^0,y^0) < 0$ und $u^0 = (u_1^0, 0, 0)$ sein muss. Falls $(x^0,y^0) > 0$ ist, dann folgt aus $w \geq 0$, $\langle w, (x^0,y^0)\rangle = 0$, dass $w = 0$ ist, d.h.

$$\nabla f(x^0,y^0) = -u_1^0 \nabla g_1(x^0,y^0),$$

$$\Rightarrow \qquad 2x^0 - 12 = -u_1^0 x^0, \qquad y^0 - 6 = -u_1^0 y^0$$

$$\overset{\|u^0\|=1 \Rightarrow u_1^0=1}{\Longrightarrow} x^0 = 4, \qquad y^0 = 3, \qquad f(x^0, y^0) = 17.$$

Wegen $f(0,5) = 73$ und $f(5,0) = 38$ ist $(x^0, y^0) = (4,3)$ Lösung von (KP).