Lösungen zur Klausur Optimierungstheorie (21.September 2009)

Aufgabe 1

a) Sei $v \in K_\infty$, d.h. es existiert ein $x \in K$, so dass $x + \lambda v \in K$ für alle $\lambda \geq 0$. Für $\beta \geq 0$ ist daher $x + \lambda(\beta v) \in K$ für alle $\lambda \geq 0$. Damit ist $\beta v \in K_\infty$.
Seien nun $v, v' \in K_\infty$, d.h. es existieren $x, x' \in K$, so dass

$$x + \lambda v \in K,$$
$$x' + \lambda v' \in K$$

für alle $\lambda \geq 0$. Für $\alpha \in [0,1]$ und $\lambda \geq 0$ gilt somit

$$\alpha(x + \lambda v) + (1-\alpha)(x' + \lambda v') = (\alpha x + (1-\alpha)x') + \lambda(\alpha v + (1-\alpha)v') \in K.$$

Damit ist dann auch $\alpha v + (1-\alpha)v'$ eine freie Richtung für K .

b) Sei $y \in K$ und $v \in K_\infty$, d.h. es existiert ein $x \in K$, so dass $x + \lambda v \in K$ für alle $\lambda \geq 0$. Für $\alpha \in [0,1]$ und $\lambda \geq 0$ betrachten wir $z_\alpha := x + \lambda v + (1-\alpha)(y - x)$. Es gilt $z_\alpha \to y + \lambda v$ für $\alpha \to 0$. Daher reicht es wegen der Abgeschlossenheit von K zu zeigen, dass $z_\alpha \in K$. Dies folgt aber wegen der Konvexität von K aus der Darstellung

$$z_\alpha = \alpha\left(x + \frac{\lambda}{\alpha}v\right) + (1-\alpha)y.$$

c) Da K nach Voraussetzung abgeschlossen ist, können wir in der ursprünglichen Aussage die Kompaktheit von K durch die Beschränktheit von K ersetzen.
Sei nun zuerst K beschränkt, d.h. $K \subset B(0,R)$ für ein $R > 0$. Wäre nun $v \neq 0$ eine freie Richtung von K , so wäre nach b) $x + \lambda v \in K$ für alle $x \in K$ und $\lambda \geq 0$. Damit wäre auch $x + \frac{3R}{\|v\|}v \in K,$ was aber wegen $\|x + \frac{3R}{\|v\|}v\| > R$ nicht der Fall sein kann.
Ist K nicht beschränkt, so wählen wir eine Folge $x_i \in K$ mit $\|x_i\| \to \infty$ und setzen $u_i := \frac{x_i}{\|x_i\|}$ (oBdA sei $\|x_i\| \geq 1$ für alle i). Da die Folge u_i in $B(0,1)$ liegt, besitzt sie eine konvergente Teilfolge u_{i_k} , deren Grenzwert wir mit u bezeichnen. Somit gilt für $x \in K$ und $\lambda \geq 0$

$$x + \lambda u = \lim_{k\to\infty}\left((1 - \frac{\lambda}{\|x_{i_k}\|})x + \frac{\lambda}{\|x_{i_k}\|}x_{i_k}\right) \in K,$$

da $\lambda/\|x_{i_k}\| \in [0,1]$ für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$ und K konvex und abgeschlossen ist. Damit enthält die unbeschränkte Menge K eine von 0 verschiedene freie Richtung.

d) Sei $v \in P_\infty$ und $x \in P$. Dann gilt nach b)

$$\begin{aligned} &x + \lambda v \in P \text{ für alle } \lambda \geq 0 \\ \Leftrightarrow &Ax + \lambda Av \leq b \text{ für alle } \lambda \geq 0 \\ \Leftrightarrow &Av \leq 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Zuerst bringen wir (P) in Standardform:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = \langle -c, x\rangle = \max \\ -Ax \leq -b \\ x \geq 0. \end{array}} \quad (P') \; .$$

Das dazu duale Programm lautet

$$\boxed{\begin{array}{c} g(u) = \langle -b, u\rangle = \min \\ -A^\top u \geq -c \\ u \geq 0. \end{array}} \quad (DP') \; .$$

Dieses entspricht aber wegen $A = -A^\top$ und $b = -c$ dem Programm

$$\boxed{\begin{array}{c} g(u) = \langle c, u\rangle = \min \\ Au \geq b \\ u \geq 0. \end{array}} \quad (DP) \; ,$$

welches äquivalent zu (P) ist.

b) Ist $M \neq \emptyset$, so ist der zulässig Bereich M' von (P') nichtleer. Weiterhin gilt wegen a) auch

$$N := \{u \in \mathbb{R}^n : Au \geq b,\, u \geq 0\} \neq \emptyset,$$

da dort gezeigt wurde, dass $M = M' = N$. Damit haben das lineare Programm (P') und sei duales Programm (DP) zulässige Punkte und aus dem Dualitätssatz folgt die Lösbarkeit von (P).
Der Dualitätssatz besagt zudem, dass

$$\max_{x \in M'} f(x) = \min_{u \in N} g(u).$$

Wegen $M' = N$ und $f(x) = -g(x)$ bedeutet dies aber gerade

$$\max_{x \in M'} f(x) = \min_{x \in M'} -f(x) = -\max_{x \in M'} f(x).$$

Damit ist $\max_{x \in M'} f(x) = 0 = \min_{u \in N} g(u)$.

c)

$$(PP) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} f(x) = x_2 & = & \max \\ x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 + x_2 & \leq & -1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}} \qquad (DP) \quad \boxed{\begin{array}{rcl} g(u) = -u_2 & = & \min \\ u_1 - u_2 & \geq & 0 \\ -u_1 + u_2 & \geq & 1 \\ u_1, u_2 \geq 0 & & \end{array}}$$

Die beiden zulässigen Bereiche sind leer.

Aufgabe 3

Hinweis: Die Aufgabenstellung von Teil a) war unvollständig. Richtigerweise hätte man die Mengen $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$ und $\tilde{M} = \{y \in \mathbb{R}^{m+n} : \tilde{A}y = b,\ y \geq 0\}$ betrachten müssen. Diese Teilfaufgabe wurde daher aus der Wertung genommen, d.h. für Teil b) allein konnte man 10 Punkte bekommen. Mathematisch richtige und gehaltvolle Ausführung zu Teil a) wurden zusätzlich dazu mit bis zu 3 Zusatzpunkten bedacht.

b) Wir führen formal die Schlupfvariablen y_1, y_2, y_3 ein und starten mit der Ecke $(y, x) = (1, 4, 2, 0, 0, 0, 0)$:

y_1	y_2	y_3	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	b	
1	0	0	**1**	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	4	4
0	0	1	0	1	0	1	2	
0	0	0	−2	−2	−1	−2	−7	

$\rightarrow$

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	b	
1	0	0	1	1	0	0	1	
−1	1	0	0	−1	1	1	3	3
0	0	1	0	1	0	**1**	2	2
2	0	0	0	0	−1	−2	−5	

$\rightarrow$

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	b	
1	0	0	1	1	0	0	1	
−1	1	−1	0	−2	**1**	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	2	
2	0	2	0	2	−1	0	−1	

$\rightarrow$

y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	0	1	1	0	0	1
−1	1	−1	0	−2	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	2
1	1	1	0	0	0	0	0

Dieses Tableau liefert die Startecke $x = (1, 0, 1, 2)$ für Phase 2.

Zweite Phase:

x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	b
1	**1**	0	0	1
0	−2	1	0	1
0	1	0	1	2
0	−3	0	0	−6

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	0	0	1
2	0	1	0	3
−1	0	0	1	1
3	0	0	0	−3

Damit ist $x^0 = (0, 1, 3, 1)$ die Lösung und $f(x^0) = 3$.

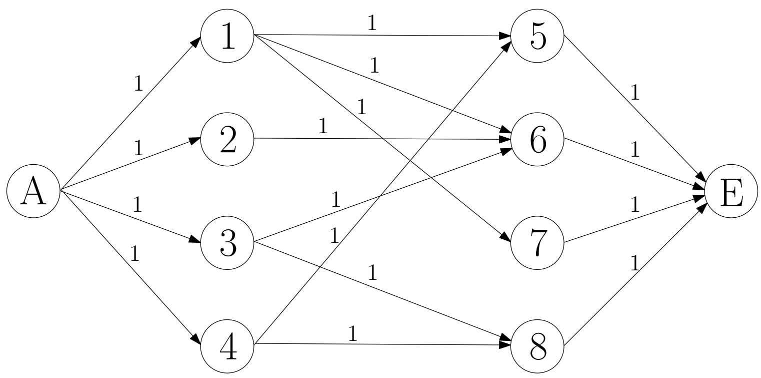
Aufgabe 4

a) Die Variablen x_{ij} mit $1 \le i \le 4,\ 5 \le j \le 8$ entsprechen den potenziellen Kanten von G . Damit hat gesuchte Zuordnungsproblem folgende Gestalt:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x) = x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{26} + x_{36} + x_{38} + x_{45} + x_{48} = \max & \\ \sum_{j=5}^{8} x_{ij} \le 1, & i = 1, \ldots, 4, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{ij} \le 1, & j = 5, \ldots, 8, \\ \quad x_{ij} \ge 0. & \end{array}}$$

Dabei machen wir von der Bemerkung aus der Vorlesung gebrauch, dass ein Problem dieser Gestalt auch als Zuordnungsproblem aufgefasst werden kann, da man dieses durch Einführen von zusätzlichen 'Bewerbern' und 'Posten' auf die Standardform bringen kann.

b) Das zugehörige Netzwerk hat folgende Gestalt:



Markierungsalgorithmus:
Startfluss $A \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{1} E$, d.h. $x_{Q1} = x_{15} = x_{5S} = 1$, sonst alles gleich 0.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	E
E		A	A	A	4	2		3	6

$x_{A2} = x_{26} = x_{6E} = 1$,
sonst wie vorher.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	E
E			A	A	4			3	8

$x_{A3} = x_{38} = x_{8E} = 1$,
sonst wie vorher.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	E
E	5			A	4		1		7

$x_{A4} = x_{45} = x_{17} = x_{7E} = 1$,
$x_{15} = 0$,
sonst wie vorher.

Das Markierungsverfahren endet. Der maximale Fluss beträgt 4. Damit löst die Menge $E^* = \{(1,7), (2,6), (3,8), (4,5)\}$ das Optimierungsproblem.

Aufgabe 5

Zuerst formulieren wir das Optimierungsproblem so um, dass es Standardform hat:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x,y) = (x-\tfrac{9}{4})^2 + (y-2)^2 = \min \\[1em] x^2 - y \le 0 \\ x + y - 6 \le 0 \\ x, y \ge 0. \end{gathered}}$$

Desweiteren sei $g_1(x,y) := x^2 - y$ und $g_2(x,y) := x + y - 6$.

a) Die Hessematrizen von f, g_1, g_2 lauten

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und sind damit alle offensichtlich positiv semidefinit, weshalb es sich bei dem Optimierungsproblem um ein konvexes Programm handelt.
Die Slater-Bedingung für (KP) besagt, dass $x, y \ge 0$ mit
$x^2 - y < 0$ und $x + y < 6$ existieren müssen. Wählen wir etwa $x = 1$ und $y = 2$, so ist dies der Fall.

b) Die lokalen Kuhn-Tucker Bedingungen für (KP) lauten: Es existiert $(x_0, y_0, u_0, v_0) \ge 0$, so dass

$$(1) \qquad w := \nabla f(x_0,y_0) + u_0 \nabla g_1(x_0,y_0) + v_0 \nabla g_2(x_0,y_0) \ge 0, \qquad \langle (x_0,y_0), w \rangle = 0,$$

$$(2) \qquad (g_1(x_0,y_0), g_2(x_0,y_0)) \le 0, \qquad u_0 g_1(x_0,y_0) + v_0 g_2(x_0,y_0) = 0.$$

Explizit:

$$(1') \qquad \begin{aligned} 2x_0(u_0+1) - \tfrac{9}{2} + v_0 \ge 0 \quad (i), &\qquad 2y_0 - 4 - u_0 + v_0 \ge 0 \quad (ii), \\ x_0(2x_0(u_0+1) - \tfrac{9}{2} + v_0) = 0 \quad (iii), &\qquad y_0(2y_0 - 4 - u_0 + v_0) = 0 \quad (iv), \end{aligned}$$

$$(2') \qquad \begin{aligned} x_0^2 - y_0 \le 0 \quad (i), &\qquad x_0 + y_0 - 6 \le 0 \quad (ii), \\ u_0(x_0^2 - y_0) = 0 \quad (iii), &\qquad v_0(x_0 + y_0 - 6) = 0 \quad (iv). \end{aligned}$$

Wir sollen zeigen, dass die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen im Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ erfüllt sind, d.h. wir suchen $u_0, v_0 \ge 0$, so dass $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, u_0, v_0)$ die Bedingungen (1') und (2') erfüllen.
Zuerst stellen wir fest, dass (2') (i) und (ii) für $(x_0, y_0) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ erfüllt sind. Damit (2') (iv) erfüllt ist muss $v_0 = 0$. Für $u_0 \ge 0$ erfüllt also $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, u_0, 0)$ die Bedingungen (2') (i)-(iv). Mit diesen Werten vereinfacht sich (1') zu

$$(1'') \qquad 3(u_0+1) - \tfrac{9}{2} = 0 \quad (i), \qquad \tfrac{9}{2} - 4 - u_0 = 0 \quad (ii).$$

Wir sehen, dass $u_0 = \frac{1}{2}$ beiden Bedingungen genügt.
Damit sind die lokalen Kuhn-Tucker-Bedingungen im Punkt $(x_0, y_0) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ erfüllt. Da die Slaterbedingung erfüllt ist folgt, dass (KP) lösbar ist und seinen Minimalwert $\frac{5}{8}$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ annimmt.