KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Stochastische Geometrie

2. Übungsblatt

4. Aufgabe
Geben Sie eine ZAM Z an, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i) Z ist isotrop und es gilt $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \text{ ist konvex}\}) = 1$.

ii) $\mathbb{P}(Z \in \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}) = 0$.

iii) Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : x \in Z(\omega)\}) > 0$.

5. Aufgabe
Sei Z eine ZAM im $\mathbb{R}^n$. Wir definieren die *Mittelwertfunktion* m von Z durch

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mathbb{E}\mathbb{1}_Z(x) \end{array}$$

und die *Kovarianzfunktion* k von Z durch

$$\begin{array}{rccc} k: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \mathbb{E}\big((\mathbb{1}_Z(x) - m(x))(\mathbb{1}_Z(y) - m(y))\big). \end{array}$$

Es sei nun zusätzlich Z stationär. Zeigen Sie:

a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $k(x,y) = k(x-y, 0)$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$k(x,0) = \mathbb{P}(x \in Z, 0 \in Z) - p^2 = \mathbb{E}\lambda_n\big(Z \cap (Z-x) \cap B^*\big) - p^2,$$

für eine beliebige Borelmenge $B \in \mathcal{B}$ mit $\lambda_n(B) = 1$. B^* bezeichnet die Spiegelung von B am Ursprung.

6. Aufgabe
Seien Z eine stationäre ZAM mit Volumendichte $p < 1$ und $K \in \mathcal{K}$ ein beliebiger konvexer Körper mit $0 \in K$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $F \in \mathcal{F}$ definieren wir

$$d_K(x, F) := \min\{r \geq 0 : (x + rK) \cap F \neq \emptyset\},$$

wobei wir $\min \emptyset := \infty$ setzen.
Des Weiteren sei

$$H^{(K)}(x, r) := \mathbb{P}(d_K(x, Z) \leq r \mid x \notin Z).$$

Zeigen Sie, dass

$$H^{(K)}(x, r) = H^{(K)}(0, r) = 1 - \frac{\mathbb{P}(0 \notin Z + rK^*)}{1 - p}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

7. Aufgabe
Zeigen Sie, dass für eine ZAM Z im $\mathbb{R}^n$ und das zugehörige Kapazitätsfunktional T folgende Aussagen äquivalent sind:

a) Z ist fast sicher konvex.

b) Das Funktional T ist auf $\mathcal{K}$ additiv, d.h. für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cup K' \in \mathcal{K}$ gilt

$$T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K').$$

Hinweis: Zum Beweis, dass $a) \Rightarrow b)$ gilt, sollten Sie zuerst $\mathbb{P}_Z(\mathcal{F}^{K \cap K'}_{K,K'}) = 0$ für alle $K, K' \in \mathcal{K}$ mit $K \cup K' \in \mathcal{K}$ zeigen.

Die Besprechung dieses Blattes erfolgt in der nächsten Übung am 28. April.