KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Stochastische Geometrie

3. Übungsblatt

8. Aufgabe

a) Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $\lambda_n(W) > 0$. Zeigen Sie, dass ein Punktprozess genau dann ein Binomialprozess von k Punkten in W ist, wenn für sein Kapazitätsfunktional

$$T(K) = 1 - \Big(1 - \frac{\lambda_n(K \cap W)}{\lambda_n(W)}\Big)^k$$

für alle $K \in \mathcal{C}$ gilt.

b) Seien X und Y zwei unabhängige Punktprozesse mit Kapazitätsfunktionalen T_X bzw. T_Y. Zeigen Sie, dass für das Kapazitätsfunktional der Überlagerung $X \cup Y$ die Beziehung

$$T_{X \cup Y}(K) = 1 - \big((1 - T_X(K))(1 - T_Y(K))\big)$$

für alle $K \in \mathcal{C}$ gilt.

9. Aufgabe

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $X_1^{(k)}, \dots, X_k^{(k)}$ unabhängige zufällige Punkte, die jeweils auf $(\frac{k}{\kappa_n})^{\frac{1}{n}} B^n$ gleichverteilt sind. Weiterhin sei $A \in \mathcal{B}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{k} X_i^{(k)}(A) = l) \quad \longrightarrow \quad e^{-\lambda_n(A)} \frac{\lambda_n(A)^l}{l!}$$

für $k \to \infty$ und alle $l \in \mathbb{N}_0$ gilt.

10. Aufgabe
Mit $\mathcal{E}_1^2 \in \mathbb{F}$ bezeichnen wir die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ und mit C die Menge

$$C := \{(p,\alpha) \in \mathbb{R}^2 : p \in \mathbb{R},\ \alpha \in [0,\pi)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei nun l eine beliebige Gerade im $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade $l^\perp$ durch den Ursprung 0, die orthogonal zu l ist. Sei $x(l) = (x_1(l), x_2(l)) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt von l und $l^\perp$ und $\alpha(l)$ der Winkel zwischen $l^\perp$ und der x-Achse, so dass $0 \leq \alpha(l) < \pi$ gelte. Definieren wir nun $p(l)$ als

$$p(l) := \begin{cases} \|x(l)\|, & \text{falls } x_1 \geq 0, \\ \\ -\|x(l)\|, & \text{sonst}, \end{cases}$$

so ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{E}_1^2 & \to & C \\ & l & \mapsto & (p(l), \alpha(l)) \end{array}$$

eine stetige Bijektion.

Nun sei X ein Punktprozess auf $\mathbb{R}^2$, dessen Intensitätsmaß $\Theta \not\equiv 0$ auf C konzentriert ist. Dann ist $X' := f^{-1}(X)$ ein Punktprozess auf $\mathcal{E}_1^2$, dessen Intensitätsmaß wir mit Θ' bezeichnen. Zeigen Sie:

a) Ist X' stationär, so existieren ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_0$ auf $\mathcal{L}_1^2$ und eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\gamma \in (0,\infty)$, so dass

$$\Theta'(\mathcal{A}) = \gamma \int\limits_{\mathcal{L}_1^2} \int\limits_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(L+x)\, d\lambda_{L^\perp}(x)\, d\mathbb{P}_0(L),$$

für alle $\mathcal{A} \in \mathbb{F}$ mit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_1^2$ gilt. Dabei bezeichne $\mathcal{L}_1^2$ die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch den Ursprung.

b) In der Situation von a) gilt

$$\gamma = \frac{1}{\pi}\, \mathbb{E} \sum_{E \in X'} \lambda_1(E \cap B^2).$$

Die Besprechung dieses Blattes erfolgt in der nächsten Übung am 5. Mai