KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Stochastische Geometrie

4. Übungsblatt

11. Aufgabe

Seien X ein Poissonprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensitätsmaß Θ und $A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkte Borelmengen, die alle in einer Borelmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ enthalten sind.
Berechnen Sie $\mathbb{P}(X(A_1) = k_1, \ldots, X(A_m) = k_m | \; X(A) = j)$ für $j,\ k_1, \ldots,\ k_m \in \mathbb{N}_0$.

12. Aufgabe

Seien X ein Poissonprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensitätsmaß Θ und $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E} \prod_{x \in X} f(x) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - 1) \, d\Theta(x) \right) \tag{1}$$

gilt.

Hinweis: Zeigen Sie (1) zuerst für messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f|_{\mathbb{R}^n \setminus A} \equiv 1$ für eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Theta(A) > 0$.

13. Aufgabe

Sei X ein Punktprozess in $\mathbb{R}^n$ mit atomfreien Intensitätsmaß Θ. Es gelte

$$\mathbb{E} \prod_{x \in X} f(x) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - 1) \, d\Theta(x) \right)$$

für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$. Zeigen Sie, dass X ein Poissonprozess ist.

Hinweis: Wählen Sie $f(x) := t^{\mathbb{1}_B(x)}$ für $t \in (0,1)$ und eine Borelmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\Theta(B) < \infty$.

Die Besprechung dieses Blattes erfolgt in der nächsten Übung am 12. Mai