KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Stochastische Geometrie

5. Übungsblatt

14. Aufgabe

Sei $X = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein stationärer Poissonprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensität $\gamma > 0$. Dabei nummerieren wir die Punkte von X aufsteigend nach ihrem Abstand vom Ursprung, d.h. es gilt $\|x_1\| \le \|x_2\| \le \dots$.

a) Zeigen Sie, dass diese Nummerierung wohldefiniert ist, d.h. dass für alle $k \in \mathbb{N}$ f.s. $\|x_k\| < \|x_{k+1}\|$ gilt.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(\|x_k\| \le r)$ für $r \ge 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

15. Aufgabe

Beweisen Sie den *Satz von Mecke*:

Sei X ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensität $\gamma > 0$. Dann ist X genau dann ein Poissonprozess, falls

$$\mathbb{E}\sum_{x\in X} f(x, X) = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\, f(X + \delta_x, x)\, dx$$

für alle nichtnegativen messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \times \mathsf{N} \to \mathbb{R}$ gilt.

16. Aufgabe

Sei X ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensität $\gamma > 0$ und bezeichne $\mathbb{P}^0$ seine Palmsche Verteilung. Wir definieren das *reduzierte zweite Momentenmaß* $\mathbb{K}$ von X durch

$$\gamma\, \mathbb{K}(A) := \int_N \eta(A \setminus \{0\})\, d\mathbb{P}^0(\eta), \quad A \in \mathcal{B}.$$

a) Zeigen Sie, dass folgendende Aussage für alle $A, B \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\Lambda^{(2)}(A \times B) = \gamma^2 \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x) \int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x+t)\, d\mathbb{K}(t)\, d\lambda_n(x).$$

b) Wir definieren die *K-Funktion* von X durch

$$\begin{array}{rccc} K: & [0,\infty) & \to & [0,\infty) \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\gamma}\mathbb{K}(tB^n). \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die K-Funktion eines stationären Poissonprozesses folgende Gestalt hat:

$$K(t) = \frac{1}{\gamma}\, \kappa_n\, t^n, \quad t \in [0,\infty)$$

17. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Palmsche Verteilung eines stationären Poissonprozesses invariant unter Drehungen ist.

Die Besprechung dieses Blattes erfolgt in der nächsten Übung am 19. Mai