KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Stochastische Geometrie

9. Übungsblatt

27. Aufgabe
Seien X ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensität $\gamma > 0$ und $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{K}_0$. Weiterhin seien $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ eine messbare Abzählung von X und $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ u.i.v. zufällige konvexe Mengen mit Verteilung $\mathbb{Q}$ unabhängig von X. Mit

$$Y := \{\xi_1 + Z_1, \xi_2 + Z_2, \dots\}$$

bezeichnen wir den Keim-Korn-Prozess, der von X und $\mathbb{Q}$ erzeugt wird.

a) Sei $M \in \mathcal{K}'$ konvex und $\mathbb{Q}$ rotationsinvariant. Berechnen Sie

$$\mathbb{E}(\,\#\{\xi_i + Z_i \in Y : M \cap (\xi_i + Z_i) \neq \emptyset\}\,).$$

b) Nun sei $M = B^n$. Zeigen Sie, dass für

$$\mathbb{E}(\,\#\{\xi_i + Z_i \in Y : B^n \cap (\xi_i + Z_i) \neq \emptyset\}\,)$$

die selbe Formel wie in a) gilt, selbst wenn $\mathbb{Q}$ nicht rotationsinvariat ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$\Theta(\mathcal{F}_C) := \mathbb{E}Y(\mathcal{F}_C) < \infty$$

für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt, sofern $\int_{\mathcal{K}_0} V_j(K)\,\mathbb{Q}(dK) < \infty$ für $j = 0, \dots, n$ erfüllt ist.

28. Aufgabe
Sei X wie in Aufgabe 27 und zusätzlich ein Poissonprozess. Zeigen Sie, dass Y dann ein Poissonprozess auf $\mathcal{K}$ ist, d.h. dass

$$\mathbb{P}(Y(\mathcal{F}_C) = k) = \frac{\Theta(\mathcal{F}_C)^k}{k!} e^{-\Theta(\mathcal{F}_C)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt.

29. Aufgabe

a) Seien $P, Q \in \mathcal{K}'$ Polytope. Zeigen Sie die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^n} S_{n-1}(P \cap (Q + x), \cdot)\, dx = S_{n-1}(P, \cdot) V_n(Q) + V_n(P) S_{n-1}(Q, \cdot).$$

b) Nun sei $n = 2$. Benutzen sie die obige Formel um für $K, L, M \in \mathcal{K}'$ die Aussage

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(K \cap (L + x), M)\, dx = V(K, M) V_2(L) + V_2(K) V(L, M)$$

zu beweisen.

Die Übung nächste Woche entfällt. Die Besprechung dieses Blattes erfolgt in der Übung am 30. Juni.