KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE

PROF. DR. W. WEIL
DIPL.-MATH. OEC. M. HÖRIG

Stochastische Geometrie

10. Übungsblatt

30. Aufgabe
Zeigen Sie die Messbarkeit der Abbildung

$$N : \mathcal{R} \to \mathbb{N}_0$$

aus der Vorlesung.

31. Aufgabe
Seien X ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensität $\gamma > 0$, $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{C}_0$ und Y der von X und $\mathbb{Q}$ generierte Keim-Korn-Prozess. Weiterhin sei $f : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ eine nicht-negative, messbare und $\mathbb{Q}$-integrierbare Funktion. Zeigen Sie folgende Version des Satzes von Campbell:

$$\mathbb{E} \sum_{C \in Y} f(C) = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathcal{C}_0} f(x + C)\, d\mathbb{Q}(C)\, d\lambda_n(x).$$

32. Aufgabe
Seien X ein stationärer Punktprozess in $\mathbb{R}^n$ mit Intensität $\gamma > 0$, $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{C}_0$ und Y der von X und $\mathbb{Q}$ generierte Keim-Korn-Prozess. Weiterhin sei $f : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ eine translationsinvariante, messbare und $\mathbb{Q}$-integrierbare Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $0 < \lambda_n(A) < \infty$ gilt

$$\overline{f}(Y) = \frac{1}{\lambda_n(A)} \mathbb{E} \sum_{C \in Y, c(C) \in A} f(C).$$

b) Für alle $K \in \mathcal{K}$ mit $\lambda_n(K) > 0$ gilt

$$\overline{f}(Y) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{\lambda_n(rK)} \mathbb{E} \sum_{C \in Y, C \subset rK} f(C).$$

Dabei definieren wir $\overline{f}(Y)$ analog zur Vorlesung als

$$\overline{f}(Y) := \gamma \int_{\mathcal{C}_0} f(C)\, d\mathbb{Q}(C).$$

Die Besprechung dieses Blattes erfolgt in der Übung am 7. Juli.