Lösungen zum 4. Übungsblatt Stochastische Geometrie

13. Aufgabe

Für $\Theta = 0$ ist die Aussage trivial, da der leere Prozess ein Poissonprozess ist. Wir nehmen daher an, dass $\Theta \neq 0$ gelte und setzen

$$f(x) := t^{\mathbb{1}_B(x)}$$

für $t \in (0,1)$ und $B \in \mathcal{B}$ mit $\Theta(B) < \infty$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, t^{X(B)} &= \mathbb{E} \prod_{x \in X} t^{\mathbb{1}_B(x)} \\
&= \exp\left(\int_{\mathbb{R}^n} (t^{\mathbb{1}_B(x)} - 1)\Theta(dx) \right) \\
&= \exp\left((t-1)\Theta(B)\right) \\
&= e^{-\Theta(B)} e^{t\Theta(B)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Wir entwickeln nun beide Seiten von (1) und erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X(B) = k) = e^{-\Theta(B)} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{1}{k!} \Theta(B)^k.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der beiden Potenzreihen, so folgt daraus

$$\mathbb{P}(X(B) = k) = \frac{e^{-\Theta(B)}}{k!} \Theta(B)^k$$

für alle $k \in \mathbf{N}_0$ und $B \in \mathcal{B}$ mit $\Theta(B) < \infty$. Wegen der Atomfreiheit von Θ folgt, dass X ein Poissonprozess ist.