Lösungen zum 2. Übungsblatt Stochastische Geometrie

6. Aufgabe Im Folgenden seien $F \in \mathcal{F}$, $K \in \mathcal{K}$ mit $0 \in K$, $x \in \mathbb{R}^n$ und $r \geq 0$. Dann gilt

$$d_K(x, F) \leq r \Leftrightarrow (x + rK) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in rK^* + F. \tag{1}$$

Insbesondere gilt folglich

$$d_K(x, F + x) = d_K(0, F). \tag{2}$$

Aus der Stationarität von Z folgt dann

$$\begin{aligned} H^{(K)}(x, r) =& \mathbb{P}(d_K(x, Z) \leq r \,|\, x \notin Z) = \frac{\mathbb{P}(d_K(x, Z) \leq r,\, x \notin Z)}{\mathbb{P}(x \notin Z)} \\ =& \frac{\mathbb{P}(d_K(x, Z + x) \leq r,\, x \notin (Z + x))}{\mathbb{P}(x \notin (Z + x))} \overset{(2)}{=} \frac{\mathbb{P}(d_K(0, Z) \leq r,\, 0 \notin Z)}{\mathbb{P}(0 \notin Z)} \\ =& 1 - \frac{\mathbb{P}(d_K(0, Z) > r,\, 0 \notin Z)}{1 - p} \overset{(1)}{=} 1 - \frac{\mathbb{P}(0 \notin rK^* + Z,\, 0 \notin Z)}{1 - p} \\ =& 1 - \frac{\mathbb{P}(0 \notin rK^* + Z)}{1 - p}, \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Umformung aus $\{0 \notin Z\} \subset \{0 \notin rK^* + Z\}$ ergibt.

Bemerkung: Für $K \in \mathcal{K}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich die Messbarkeit der Abbildung $f : \mathcal{F} \to [0, \infty)$, $F \mapsto d_K(x, F)$ aus der Darstellung $f^{-1}((r, \infty)) = \mathcal{F}^{x + rK^*}$ für $r \geq 0$.