Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 11

Aufgabe 1.
Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *(Riemannsch) homogen*, falls zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine Isometrie $\Phi \in \operatorname{Isom}(M, g)$ existiert, sodass $\Phi(p) = q$ gilt.

Zeigen Sie, dass jede homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit (geodätisch) vollständig ist.

Aufgabe 2.
Es bezeichne $\operatorname{Sym}(n)$ die symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen, sowie $\operatorname{Sym}_+(n)$ die positiv definiten symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $M := \{A \in \operatorname{Sym}_+(n) \mid \det A = 1\}$ und $H := \{A \in \operatorname{Sym}(n) \mid \operatorname{Spur} A = 0\}$.

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\alpha\colon \operatorname{Sym}(n) \to \operatorname{Sym}_+(n),\ A \mapsto e^A$ bijektiv ist. Nutzen Sie dies um zu zeigen, dass die Kurven durch die Einheitsmatrix I, gegeben durch e^{tA} für $A \in \operatorname{Sym}(n)$, es erlauben, den Tangentialraum $\mathrm{T}_I M$ mit H zu identifizieren.

Aufgabe 3.
Auf der Mannigfaltigkeit M aus der vorigen Aufgabe definiert

$$\theta\colon \operatorname{SL}(n) \times M \to M, \quad (G, A) \mapsto GAG^T$$

eine sogenannte Wirkung von $\operatorname{SL}(n)$, der Matrizen mit Determinante 1, auf M. Eine Riemannsche Metrik g auf M heißt invariant unter einer Wirkung θ, falls $\theta(G, -)_{*A}$ für alle $G \in \operatorname{SL}(n)$ and $A \in M$ eine Isometrie ist.

Zeigen Sie, dass durch $(A, B) \mapsto \operatorname{Spur}(AB)$ ein Skalarprodukt auf $\operatorname{Sym}(n)$ definiert ist. Nutzen Sie dies um eine invariante Riemannsche Metrik auf M zu definieren.