Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 12

Aufgabe 1.
Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$. Weiter seien $p \in M$ und $v, w \in \mathrm{T}_p M$. Geben Sie eine allgemeine Formel für Jacobifelder $J(t)$ längs einer Geodätischen γ durch $p = \gamma(0)$ mit den Anfangsbedingungen $J(0) = v$ und $J'(0) = w$ an.

Hinweis: In der Vorlesung wurde der Fall $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eukl}})$ behandelt, in dem $\kappa = 0$ und damit $J(t) = v + tw$ gilt.

Aufgabe 2.
Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und $p \in M$. Zeigen Sie, dass es genau dann zu p konjugierte Punkte gibt, wenn $\kappa > 0$ gilt.

Aufgabe 3.
Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Weiter sei $\gamma\colon [0, a] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, $\|v\| = 1$ und $w \in \mathrm{T}_p M$ mit $\|w\| = 1$ und $\langle v, w \rangle = 0$. Es sei J das durch

$$J(t) = (\exp_p)_{*tv} tw \in \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

gegebene Jacobifeld längs γ und $\sigma = \mathrm{span}\{v, w\}$. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von $|J(t)|$ gegeben ist durch

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6} \sec(\sigma) t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \to 0.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Entwicklung von $|J(t)|^2$ und zeigen Sie hierfür die Identität $\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0)$.