Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (1) Es seien auf $\mathbb{R}^2$ die beiden Vektorfelder

$$X := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{und} \quad Y := -2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial y}$$

gegeben. Skizzieren Sie die Vektorfelder und bestimmen Sie für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die maximale Integralkurve von X bzw. Y durch (x_0, y_0).

(2) Auf dem Torus $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{i\vartheta^1}, e^{i\vartheta^2}) \in \mathbb{C}^2 \mid \vartheta^1, \vartheta^2 \in \mathbb{R}\}$ betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ das Vektorfeld $X_k = \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \vartheta^2}$. Bestimmen Sie die maximale Integralkurve von X_k durch den Punkt $(1, 1) \in \mathrm{T}^2$.

Aufgabe 2.
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Lieklammer

$$[-, -]\colon \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M)$$

im Allgemeinen nicht $C^\infty(M)$-bilinear ist.

Aufgabe 3.
Berechnen Sie die Lieklammern der folgenden drei Vektorfelder auf $M = \mathbb{R}^3$:

$$X := y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y := z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z := x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aufgabe 4.
Gegeben sei die glatte Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ und die glatten Vektorfelder

$$X := \cos(x)\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{and} \quad Y := (1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x}.$$

(1) Zeigen Sie, dass X und Y f-verwandt sind.

(2) Zeigen Sie, dass es kein glattes Vektorfeld Y auf $\mathbb{R}$ gibt, dass mit $X := \frac{\partial}{\partial x}$ f-verwandt ist.

(3) Geben Sie ein glattes Vektorfeld X auf $\mathbb{R}$ an, dass mit unendlich vielen verschiedenen glatten Vektorfeldern Y f-verwandt ist.

Abgabe bis Montag, den **14. November**, vor der Übung oder direkt beim Übungsleiter.