Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1.
Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung für M eingeführten Krümmungsgrößen: Schnittkrümmung, Ricci-Krümmung und Skalarkrümmung wohldefiniert sind, wofür Sie deren Unabhängigkeit von der Basis der Ebene bzw. der Wahl einer Orthonormalbasis nachweisen müssen.

Aufgabe 2.
Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ und ∇ der kanonische Zusammenhang[1] auf dem Tangentialbündel des $\mathbb{R}^n$. Für ein glattes Vektorfeld X auf M bezeichne $\tilde{X}$ eine beliebige Fortsetzung von X zu einem glatten Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$ und für $v \in \mathbb{R}^n \cong \mathrm{T}_p \mathbb{R}^n$ bezeichne $v^{\mathrm{T}_p M}$ die orthogonale Projektion von v auf den Tangentialraum von M an p.

Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M \colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), \quad (\nabla^M_X Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{\mathrm{T}_p M},$$

einen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von M definiert, der mit dem Levi-Civita Zusammenhang auf M übereinstimmt.

Aufgabe 3.
Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der n-Sphäre vom Radius $r > 0$, also von S^n mit der von $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Riemannschen Metrik.

Hinweis. Benutzen Sie, dass der Levi-Civita Zusammenhang auf S^n, wie in Aufgabe 2 gezeigt, durch $(\nabla_X Y)_p = ((\mathrm{D}Y)_p \cdot X_p)^{\mathrm{T}_p S^n}$ gegeben ist.

Abgabe bis Montag, den **28. November**, vor der Übung oder direkt beim Übungsleiter.

[1] Fasst man $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ als differenzierbare Abbildungen $X, Y \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auf, so ist $\nabla_X Y = DY \cdot X$.