Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.
Es sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel mit lokaler Trivialisierung $(U_j)_{j \in J}$. Zeigen Sie, dass die Übergangsabbildungen die sogenannten *Kozyklus-Bedingungen* erfüllen. Diese besagen, dass für alle $j, k, l \in J$ und $x \in U_j \cap U_k \cap U_l$ die folgenden Gleichheiten gelten:

$$g_{jj} = \mathrm{id}, \quad g_{jk}|_x = g_{kj}|_x^{-1} \quad \text{und} \quad g_{jl}|_x = g_{jk}|_x \circ g_{kl}|_x.$$

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass ein Vektorbündel $E \xrightarrow{\pi} M$ genau dann trivial ist (i.e. $E = M \times \mathbb{R}^k$ bzw. $E = M \times \mathbb{C}^k$ und $\pi = \mathrm{pr}_M$), wenn es eine lokale Trivialisierung $(U_j)_{j \in J}$ gibt, für die sämtliche Übergangsabbildungen $g_{jk}|_x$ die Identität sind.

Aufgabe 3. (1) Es sei

$$\text{Möb} := \mathbb{R}^2 \,/_{(x+1,y)\sim(x,-y)} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R} \,/\, \mathbb{Z} = S^1, \quad [(x,y)] \mapsto [x]$$

das *Möbius-Bündel* über dem Kreis S^1. Zeigen Sie, dass jeder Schnitt $\sigma \in \Gamma(S^1, \text{Möb})$ eine Nullstelle besitzen muss und folgern Sie, dass es sich nicht um das triviale Vektorbündel $S^1 \times \mathbb{R}$ handeln kann.

(2) Zeigen Sie, dass jedes reelle Geradenbündel $E \xrightarrow{\pi} S^1$ über der Basis S^1 entweder zum trivialen Bündel $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ oder zum Möbius-Bündel $\text{Möb} \to S^1$ als Vektorbündel isomorph ist.