Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 8

Aufgabe 1.
Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\eta \in \Omega^p(M)$, $\omega \in \Omega^q(M)$ und $f \colon N \to M$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

(1) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$,
(2) $f^*(\eta \wedge \omega) = f^*\eta \wedge f^*\omega$.

Aufgabe 2.
Es seien die beiden 1-Formen $\eta = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ und $\omega = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Bestimmen Sie die Teilmenge, auf der η und ω linear unabhängig sind und finden Sie auf dieser zu η und ω duale Vektorfelder.

Aufgabe 3.
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Differentialform $\omega \in \Omega^p(M)$ heißt *geschlossen*, falls $\mathrm{d}\omega = 0$, während man sie als *exakt* bezeichnet, falls eine Form $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ existiert, sodass $\mathrm{d}\eta = \omega$ gilt.

(1) Bestimmen Sie, welche der folgenden auf $\mathbb{R}^3$ definierten Differentialformen geschlossen und welche exakt sind:

  (1) $\omega_1 = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$
  (2) $\omega_2 = y^2\,\mathrm{d}x + x^3yz\,\mathrm{d}y + x^2y\,\mathrm{d}z$
  (3) $\omega_3 = x\,\mathrm{d}x + x^2y^2\,\mathrm{d}y + yz\,\mathrm{d}z$
  (4) $\omega_4 = 2xy^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

(2) Zeigen Sie, dass die geschlossenen Formen eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $\Omega^*(M)$ bilden, welche die exakten Formen als Ideal enthält.