

# Differentialgeometrie

WS 2012/13

## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1

- (a) Es seien  $S^n = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n (x^i)^2 = 1\}$ ,  $N = (1, 0, \dots, 0)$  und  $S = (-1, 0, \dots, 0)$ .

Weiter seien

$$\varphi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left( \frac{x^1}{1-x^0}, \dots, \frac{x^n}{1-x^0} \right)$$

und

$$\psi : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left( \frac{x^1}{1+x^0}, \dots, \frac{x^n}{1+x^0} \right).$$

Zeigen Sie, dass  $\{(\varphi, S^n \setminus \{N\}), (\psi, S^n \setminus \{S\})\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $S^n$  ist.

- (b) Für  $i = 0, \dots, n$  sei  $U_i^\pm = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$  und

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x^0, \dots, x^n) \mapsto (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n).$$

Zeigen Sie, dass  $\{(\varphi_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon) \mid i = 0, \dots, n, \varepsilon \in \{+, -\}\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas ist, der mit dem durch stereographische Projektion gegebenen verträglich ist.

### Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass durch die Karte

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$$

eine  $C^\infty$ -Struktur induziert wird, die von der kanonischen (von  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  induzierten)  $C^\infty$ -Struktur auf  $\mathbb{R}$  abweicht.

Sind die beiden Strukturen diffeomorph?

### Aufgabe 3

Es sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Weiter seien  $M_1$  und  $M_2$  zwei  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten und  $N_i \subseteq M_i$  Untermannigfaltigkeiten.

Zeigen Sie: Ist  $f \in C^j(M_1, M_2)$  für  $1 \leq j \leq k$  und ist  $f(N_1) \subseteq N_2$ , so ist  $f|_{N_1} \in C^j(N_1, N_2)$ .

### Aufgabe 4

In welchen der folgenden Fälle ist  $N$  eine Untermannigfaltigkeit der glatten Mannigfaltigkeit  $M$ ?

(a)  $M = S^n$ ,  $N = \{(x^0, \dots, x^n) \in S^n \mid x^2 = \dots = x^n = 0\}$

(b)  $M = \mathbb{R}^2$ ,  $N = \{(0, y) \mid y \geq 0\} \cup \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$