Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Algebra und Geometrie**

Dr. S. Grensing
Dr. M. Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

# Differentialgeometrie

**WS 2012/13**

## Übungsblatt 11

---

### Aufgabe 1

Es sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und

$$C_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases}, \qquad S_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sin(\sqrt{\kappa}t) & \kappa > 0 \\ t & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}}\sinh(\sqrt{|\kappa|}t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Es sei $(M,g)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\gamma$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Für alle $t$ und jede Ebene $P \leq \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$ mit $\dot\gamma(t) \in P$ gelte $\sec(P) = \kappa$.
Zeigen Sie, dass jedes orthogonale Jacobivektorveld $J$ längs $\gamma$ die Form

$$J(t) = C_\kappa(t)A(t) + S_\kappa(t)B(t)$$

mit parallelen Vektorfeldern $A, B$ längs $\gamma$ hat.

### Aufgabe 2

Es sei $(M,g)$ eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ und $p \in M$. Zeigen Sie, dass es genau dann zu $p$ konjugierte Punkte gibt, wenn $\kappa > 0$ gilt.

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 18.01.2013