Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Dr. S. Grensing
Dr. M. Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie

WS 2012/13

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Es sei $\gamma : [0,a] \to M$ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$, $\|v\| = 1$ und $w \in \mathrm{T}_p M$ mit $\|w\| = 1$ und $\langle v, w\rangle = 0$. Es sei J das durch

$$J(t) = (\exp_p)_{*_{tv}} tw \in \mathrm{T}_{\gamma(t)} M$$

gegebene Jacobivektorfeld längs γ und $\sigma = \mathrm{span}\{v, w\}$. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von $|J(t)|$ gegeben ist durch

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6}\sec(\sigma)t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \to 0.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Entwicklung von $|J(t)|^2$ und zeigen Sie hierfür die Identität $\nabla_{\gamma'}(R(\gamma', J)\gamma')(0) = R(\gamma', J')\gamma'(0)$.

Aufgabe 2

Es seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0,a] \to M$ zwei Geodätische mit $\gamma_1(0) = \gamma_2 = (0) =: p$, deren Ableitungen $v := \dot\gamma_1(0)$ und $w := \dot\gamma_2(0)$ normiert und linear unabhängig seien. Weiter sei $L(t) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Zeigen Sie, dass

$$L(t) = t\|v - w\| - \frac{1}{12}\sec(\mathrm{span}\{v, w\})\|v - w\|(1 + \langle v, w\rangle)t^3 + o(t^3) \quad \text{für } t \to 0$$

gilt.

Hinweis: Betrachten Sie die Variation $(t, s) \mapsto \exp(s \exp^{-1}_{\gamma_1(t)}(\gamma_2(t)))$.

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 25.01.2013