Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Dr. S. Grensing
Dr. Michael Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie

WS 2012/13

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es sei $\psi : (0,\infty) \times (0,2\pi) \to \mathrm{Bild}(\psi) \subset \mathbb{R}^2$, $(r,\vartheta) \mapsto r(\cos(\vartheta),\sin(\vartheta))$. Dann ist die Inverse $\varphi = \psi^{-1}$ eine Karte von $\mathbb{R}^2$ mit Kartengebiet $\mathrm{Bild}(\psi)$ und Komponenten $r = \varphi^1$, $\vartheta = \varphi^2$. Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ in kartesischen Koordinaten, d.h. bzgl der kanonischen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 2

(a) Es seien M_1 und M_2 glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen sie, dass die Projektionen

$$\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i, (p_1,p_2) \mapsto p_i$$

Submersionen sind.

(b) Es sei

$$f : (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \big(\sin(t), \sin(2t)\big).$$

Zeigen Sie, dass f eine injektive Immersion, aber keine Einbettung ist und skizzieren Sie $\mathrm{Bild}(f)$.

Aufgabe 3

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + az^2$. Skizzieren Sie für $a = 0$, $a = 1$ und $a = -1$ die Niveaumengen

$$f^{-1}(c) = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Big| f(x,y,z) = c\Big\}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Welche Niveaumengen sind C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind, indem Sie sie als reguläre Urbilder darstellen und bestimmen Sie ihre Dimensionen.

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 2.11.2012.