Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Dr. S. Grensing
Dr. M. Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie

WS 2012/13

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Die kanonische Projektion $\pi : \mathrm{T}M \to M$ ist ein Submersion.

(b) Der Nullschnitt $\sigma : M \to \mathrm{T}M, p \mapsto 0 \in \mathrm{T}_pM$ ist eine Einbettung.

(c) Ist N eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $\Phi : M \to N$ glatt, so ist $\Phi_* : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N$ glatt.

Aufgabe 2

Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Lieklammer im Allgemeinen nicht $C^\infty(M)$-bilinear ist.

(b) Zeigen Sie, dass XY mit $XY(p)(f) := X_p(Y(f))$ für $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$ im Allgemeinen kein Vektorfeld ist.

Es sei ferner (φ, U) eine Karte von M und $X|_U = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, sowie $[X,Y]|_U = \sum\limits_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ die lokalen Darstellungen von X, Y und $[X,Y]$ bezüglich φ.

(c) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\zeta^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right).$$

Aufgabe 3

(a) Es seien auf $\mathbb{R}^2$ die beiden Vektorfelder $X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ und $Y = -2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial y}$ gegeben. Skizzieren Sie die Vektorfelder und bestimmen Sie die Flüsse von X und Y.

(b) Auf dem Torus $\mathrm{T}^2 = \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 = \{(e^{i\vartheta^1}, e^{i\vartheta^2}) \in \mathbb{C}^2 | \vartheta^1, \vartheta^2 \in \mathbb{R}\}$ betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$ das Vektorfeld $X_k = \frac{\partial}{\partial \vartheta^1} + \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \vartheta^2}$. Bestimmen Sie die Integralkurve von X_k durch den Punkt $(1,1) \in \mathrm{T}^2$.

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 9.11.2012.