Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Algebra und Geometrie**

Dr. S. Grensing
Dr. M. Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

# Differentialgeometrie

**WS 2012/13**

## Übungsblatt 4

Es sei stets $M$ eine glatte $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

### Aufgabe 1

Es seien $X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $X$ und $Y$ vollständig sind. Zeigen Sie dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

$(i)$ $[X, Y] = 0$.

$(ii)$ Die Flüsse von $X$ und $Y$ kommutieren, d.h. $\gamma_X^t \circ \gamma_Y^s = \gamma_Y^s \circ \gamma_X^t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

**Anmerkung:** Die Aussage gilt auch für nicht vollständige Vektorfelder für geeignete Zeiten $s$ und $t$.

### Aufgabe 2

Es sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von $M$ und für alle $\alpha, \beta \in I$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ seien eine glatte Funktion $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ gegeben. Es gelte $g_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\gamma}(p) \cdot g_{\gamma\beta}(p)$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in I$ und $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.
Weiter sei

$$E := \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbb{R}^k)/\sim,$$

wobei für $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ und $v, w \in \mathbb{R}^k$ gelte:

$$(p, v) \sim (q, w) \Leftrightarrow p = q \text{ und } v = g_{\alpha\beta}(q)w$$

Zeigen Sie, dass $\pi : E \to M, [p, v] \mapsto p$ ein Vektorbündel über $M$ vom Rang $k$ ist.

### Aufgabe 3

Es seien $E, E'$ Vektorbündel über $M$ und $F : E \to E'$ ein Bündelmorphismus, der faserweise ein Isomorphismus ist, d.h für alle $p \in M$ ist $F_p : E_p \to E'_p$ ein Isomorphismus.
Zeigen Sie, dass $F$ ein Bündelisomorphismus ist, es also einen zu $F$ inversen Bündelmorphismus gibt.

### Aufgabe 4

(a) In einem Vektorbündel $E$ vom Rang $k$ über $M$ gebe es $k$ punktweise linear unabhängige Schnitte. Zeigen Sie, dass $E$ trivial ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{T}\,\mathrm{S}^3$ trivial ist.

**Hinweis:** Unter dem kanonischen Isomorphismus $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$ entspricht $\mathrm{T}_p\mathrm{S}^3 \subset \mathrm{T}_p\mathbb{R}^4$ dem orthogonalen Komplement $p^\perp$.

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 16.11.2012.