Institut für Algebra und Geometrie
Dr. S. Grensing
Dr. M. Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie

WS 2012/13

Übungsblatt 6

Aufgabe 1
Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

(a) Für je zwei Punkte in M existiert eine stückweise glatte Kurve, die diese verbindet.

(b) Die Abstandsfunktion

$$d(p,q) = \inf\{\mathcal{L}(c)|\ c : [0,1] \to M \text{ ist stückweise glatt}, c(0) = p, c(1) = q\}$$

ist eine Metrik, welche die ursprüngliche Topologie erzeugt.

Aufgabe 2
Es sei für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle x, y\rangle := -x^0y^0 + x^1y^1 + \cdots + x^ny^n,$$

sowie

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle x, x\rangle = -1, x^0 > 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist, und $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ für alle $p \in \mathbb{H}^n$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{T}_p\,\mathbb{H}^n \subset \mathrm{T}_p\,\mathbb{R}^{n+1}$ definiert und die Gesamtheit dieser Skalarprodukte eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{H}^n$ ist.
Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{H}^n, g)$ heißt *n-dimensionaler hyperbolischer Raum.*

Aufgabe 3
Es sei $s = (-1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung ϕ mit

$$\phi(x) := s - \frac{2(x-s)}{\langle x-s, x-s\rangle}, \quad x \in \mathbb{H}^n,$$

ist ein Diffeomorphismus von $\mathbb{H}^n$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^n \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| < 1\}$.

(b) In der Karte ϕ hat die Riemannsche Metrik auf $\mathbb{H}^n$ die Form

$$\frac{4}{(1-\|\xi\|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} d\xi^i \otimes d\xi^i.$$

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 30.11.2012.