Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Dr. S. Grensing
Dr. M. Wiemeler
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie

WS 2012/13

Übungsblatt 7

Aufgabe 1

Es sei S^2 versehen mit der von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik. Weiter sei $c : [0,1] \to S^2$ eine kürzeste C^1-Kurve zwischen $c(0) = N = (0,0,1)$ und $c(1)$. Zeigen Sie, dass das Bild von c in einem Großkreis enthalten ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Parametrisierung $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\vartheta)\cos(\varphi), \cos(\vartheta)\sin(\varphi), \sin(\vartheta))$.

Aufgabe 2

Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$ und ∇ der kanonische Zusammenhang auf dem Tangentialbündel des $\mathbb{R}^k$. Für ein Vektorfeld X auf M bezeichne $\tilde{X}$ eine beliebige Fortsetzung von X zu einem Vektorfeld auf $\mathbb{R}^k$ und für $v \in \mathbb{R}^k \cong \mathrm{T}_p\mathbb{R}^k$ bezeichne v^{T_pM} die orthogonale Projektion von v auf den Tangentialraum von M an p.
Zeigen Sie, dass

$$\nabla^M : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) \to \mathcal{V}(M), \quad (\nabla^M_X Y)_p := ((\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p)^{\mathrm{T}_pM},$$

einen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von M definiert.

Aufgabe 3

(a) Es sei E ein Vektorbündel über M und ∇ ein Zusammenhang auf E. Weiter sei

$$\nabla^* : \mathcal{V}(M) \times \Gamma(E^*) \to \Gamma(E^*), \quad (\nabla^*_X(s^*))_p(v) := X_p(s^*(\tilde{v})) - s^*_p((\nabla_X(\tilde{v}))_p)$$

für $X \in \mathcal{V}(M)$, $s^* \in \Gamma(E^*)$, $v \in E_p$ und $\tilde{v} \in \Gamma(E)$ eine Fortsetzung von v.

Zeigen Sie, dass ∇^* ein Zusammenhang auf E^* ist.

(b) Es seien E_1 und E_2 Vektorbündel über M mit Zusammenhängen ∇^1 und ∇^2. Zeigen Sie, dass es auf $E_1 \otimes E_2$ genau einen Zusammenhang ∇ gibt, der

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1_X(s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2_X(s_2)$$

für $X \in \mathcal{V}(M)$ und $s_i \in \Gamma(E_i)$ erfüllt.

Abgabe in der Vorlesung am Freitag, den 7.12.2012