Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, welche der folgenden topologischen Räume topologische Mannigfaltigkeiten sind:

(a) $X_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; xy = 0\big\}$,

(b) $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$,

jeweils versehen mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Teilraumtopologie;

(c) $X_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ oder } (x, y) = (0, 1)\}$, versehen mit der kleinsten Topologie, die folgende Mengen enthält:
   - alle im üblichen Sinne offenen Teilmengen der x-Achse,
   - alle Mengen der Gestalt $\{(x, y) \in X_3 \mid 0 < |x| < \varepsilon\}$ für jedes $\varepsilon > 0$;

(d) $X_4 = \mathbb{R} \times A$ mit der Produkttopologie, wobei $\mathbb{R}$ die übliche und $A = \mathbb{R}$ die diskrete Topologie trage.

Aufgabe 2

Definiere $\mathcal{A} = \{(\phi_i^+, U_i^+), (\phi_i^-, U_i^-) \mid i = 0, \dots, n\}$, wobei

- $U_i^+ = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{S}^n \mid x_i > 0\}$, $U_i^- = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathrm{S}^n \mid x_i < 0\}$ und
- $\phi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ mit $\phi_i^\pm(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n$ das Streichen der i-ten Komponente sei.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein C^∞-Atlas für S^n ist.

Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie ohne Verwendung des Satzes der Invarianz der Dimension, dass für $k > 0$ die Dimension einer zusammenhängenden C^k-Mannigfaltigkeit wohlbestimmt ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann zusammenhängend ist, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr in den Abgabekasten (im 1C-Teil des Allianzgebäudes).