Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie

WS 2013/14

Übungsblatt 11

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es für jede glatte Abbildung $f : \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ einen Punkt $p \in \mathrm{S}^2$ gibt, so dass $f(p) = f(-p)$.
Hinweis: Konstruieren Sie (unter der Annahme die Behauptung wäre falsch) eine geeignete Abbildung $g : \mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ und betrachten Sie $dg_1 \wedge dg_2$.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definierte 1-Form

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

geschlossen, aber nicht exakt ist. Folgern Sie hieraus, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht diffeomorph sind.

Aufgabe 3

Es seien

$$(0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathrm{S}^2, (\phi, \psi) \mapsto (\cos(\phi)\cos(\psi), \sin(\phi)\cos(\psi), \sin(\psi))$$

sphärische Polarkoordinaten auf der 2-Sphäre. Berechnen Sie in diesen Koordinaten die von der Euklidischen Metrik des $\mathbb{R}^3$ auf S^2 induzierte Metrik und deren Volumenelement.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr.