

Übungsblatt 12

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Koszul-Formel

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle Z, X \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) \\ + \langle [X, Y], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle$$

einen linearen Zusammenhang auf dem Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit definiert, welcher metrisch und torsionsfrei ist.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für einen linearen Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M die Abbildung

$$T : \Gamma(M, \mathbb{T}M) \times \Gamma(M, \mathbb{T}M) \rightarrow \Gamma(M, \mathbb{T}M) \\ (X, Y) \mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

einen $(2, 1)$ -Tensor definiert.

Aufgabe 3

Es sei ∇ der Zusammenhang auf \mathbb{R}^3 für den gilt

$$\nabla_X Y = Z, \quad \nabla_Y X = -Z, \quad \nabla_X Z = -Y, \quad \nabla_Z X = Y, \quad \nabla_Y Z = X, \quad \nabla_Z Y = -X$$

und

$$\nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0,$$

wobei $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ und $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ die Koordinatenvektorfelder auf \mathbb{R}^3 sind.

Zeigen Sie, dass ∇ metrisch ist, und bestimmen Sie den Torsionstensor von ∇ .