Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann

Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 13

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ versehen mit der Riemannschen Metrik

$$g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

Dann heißt $(\mathbb{H}, g)$ die *hyperbolische Ebene*. Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sei

$$h_A : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Zeigen Sie

(a) Es ist $h_A(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$ und h_A ist eine Isometrie von $(\mathbb{H}, g)$.

(b) Die Kurve $\gamma(t) = ie^t$ ist eine Geodätische von $\mathbb{H}$.

(c) Finden Sie (bis auf Reparametrisierung) alle Geodätischen von $\mathbb{H}$.

Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass die Funktionen h_A holomorph sind. Wie lässt sich die Riemannsche Metrik g unter derm Isomorphismus $\mathrm{T}_z\,\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ beschreiben?

Aufgabe 2

Es sei ∇ der Zusammenhang auf $\mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 3 des zwölften Blatts. Bestimmen Sie die Parallelverschiebung eines Vektors $v \in \mathrm{T}_{(0,0,0)}\,\mathbb{R}^3$ längs der Kurve $\gamma(t) = (t, 0, 0)$.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr.