Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann

Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 2

Aufgabe 1

Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und f eine Abbildung von M nach N. Beweisen Sie, dass f genau dann in $p \in M$ differenzierbar ist, wenn $\psi \circ f$ für jede in $q = f(p)$ differenzierbare Funktion $\psi : N \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar ist.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass der durch stereographische Projektionen und der in Aufgabe 2 des ersten Blatts gegebene Atlas kompatibel sind, also die gleiche differenzierbare Struktur auf S^n induzieren.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Atlas von S^n aus mindestens zwei Karten besteht.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times n}$ und somit eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie weiter, dass die Multiplikation und Inversenbildung in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ glatte Abbildungen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ kompakt ist.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr in den Abgabekasten (im 1C-Teil des Allianzgebäudes).