Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 3

Aufgabe 1

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + az^2$. Skizzieren Sie für $a = 0$, $a = 1$ und $a = -1$ die Niveaumengen

$$f^{-1}(c) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(x, y, z) = c\right\}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Welche Niveaumengen sind C^∞-Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ glatte Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind, indem Sie diese als reguläre Urbilder darstellen, und bestimmen Sie ihre Dimensionen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ und } x_3^2 + x_4^2 = 1\right\}$$

eine C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 3

Es sei T der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2,$$

versehen mit der Quotiententopologie.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine C^∞-Struktur auf T bezüglich derer die kanonische Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{R}^2 \to T, p \mapsto [p]$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h.: Jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ hat eine offene Umgebung U, die durch $\pi|_U$ diffeomorph auf eine offene Teilmenge von T abgebildet wird.

(b) Finden Sie einen C^∞-Diffeomorphismus von T auf $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$.

(c) Finden Sie einen C^∞-Diffeomorphismus auf den Rotationstorus $M \subset \mathbb{R}^3$, der (mit $a > r > 0$) definiert ist durch

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 = r^2\right\}$$

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr in den Abgabekasten (im 1C-Teil des Allianzgebäudes).