Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 4

Aufgabe 1

Es seien M eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension n, $p \in M$ und (φ, U), $(\tilde{\varphi}, \tilde{U})$ Karten von M um p. Zeigen Sie, dass die induzierten Basisvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p$ und $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\big|_p$ folgendes Transformationsverhalten aufweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\tilde{\varphi}^j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\Big|_p .$$

Aufgabe 2

Es sei $\psi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}),\ (r, \vartheta) \mapsto r(\cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$. Dann ist die Inverse $\varphi = \psi^{-1}$ eine Karte von $\mathbb{R}^2$ mit Kartengebiet Bild(ψ) und Komponenten $r = \varphi^1$, $\vartheta = \varphi^2$.
Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ in kartesischen Koordinaten, d.h. bzgl der kanonischen Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, und skizzieren Sie diese.

Aufgabe 3

Es sei M eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A}$ die differenzierbare Struktur auf M, $p \in M$ und

$$\mathrm{Tri}_p M := \{(p, \xi, (\varphi, U)) \mid \xi \in \mathbb{R}^n, (\varphi, U) \in \mathcal{A}, p \in U\} .$$

Weiter sei

$$(p, \xi, (\varphi, U)) \sim (p, \xi', (\varphi', U')) :\Longleftrightarrow D(\varphi' \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))\xi = \xi'$$

und $\mathrm{Tang}_p M := \mathrm{Tri}_p M / \sim$.
Zeigen Sie, dass

(a) $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist,

(b) durch

$$\lambda_1(p, \xi_1, (\varphi, U)) + \lambda_2(p, \xi_2, (\varphi, U)) := (p, \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2, (\varphi, U)) \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

eine Vektorraumstruktur auf $\mathrm{Tang}_p M$ induziert wird, und

(c) es kanonische Vektorraumisomorphismen von $\mathrm{Tang}_p M$ auf $\mathrm{T}_p^{\mathrm{geo}}\, M$ und $\mathrm{T}_p\, M$ gibt.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr.