Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, M zusammenhängend und f eine glatte Abbildung von M nach N, deren Differential f_* in jedem Punkt von M verschwindet. Zeigen Sie, dass f dann konstant ist.

Aufgabe 2

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathrm{T}\, M$ das Tangentialbündel von M. Zeigen Sie, dass der Nullschnitt $0_M := \{0 \in \mathrm{T}_p\, M \mid p \in M\}$ von $\mathrm{T}\, M$ eine zu M diffeomorphe Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{T}\, M$ ist.

Aufgabe 3

(a) Es sei M eine glatte Mannigfatligkeit und N eine Untermannigfaltigkeit, sowie $p \in N$. Zeigen Sie, dass sich $\mathrm{T}_p\, N$ in kanonischer Weise mit einem Teilraum von $\mathrm{T}_p\, M$ identifizieren lässt.

(b) Zeigen Sie, dass (unter dem durch die Karte $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+l}}$ gegebenen Isomorphismus $\mathrm{T}_p\, \mathbb{R}^{n+l} \simeq \mathbb{R}^{n+l}$) der Tangentialraum $\mathrm{T}_p\, M$ an eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^{n+l}$ im Punkt $p \in M$ gegeben ist, durch

  (i) $\mathrm{Kern}(\mathrm{D}f_p)$, wobei f eine Abbildung wie im ersten Teil des Satzes über äquivalente Charakterisierungen von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+l}$ ist;

  (ii) $\mathrm{Bild}(\mathrm{D}\psi_{\psi^{-1}(p)})$, wobei ψ eine lokale Parametrisierung wie im dritten Teil des Satzes ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{T}_p\, \mathrm{S}^n = p^\perp$.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr.