Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Karlsruher Institut für Technologie

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, auf der die 1-Formen $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$ und $\eta = x_2 dx_1 + x_1 dx_2$ linear unabhängig sind und finden Sie die auf dieser Teilmenge zu ω und η dualen Vektorfelder.

Aufgabe 2

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass die Kovektorfelder auf M gerade den $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Gamma(M, \mathrm{T}\, M)$[1] $\to C^\infty(M)$ entsprechen.

(b) Zeigen Sie dass für $X, Y \in \Gamma(M, \mathrm{T}\, M)$ die Abbildung XY mit $XY(p)(f) := X\big|_p(Y(f))$ für $p \in M$ und $f \in C^\infty(M)$ im Allgemeinen kein Vektorfeld ist.

Aufgabe 3

Es sei M eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, $\pi : \mathrm{T}\, M \to M$ die kanonische Projektion und $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R}^n \to M, (p, v) \mapsto p$.
Zeigen Sie, dass es genau dann einen Diffeomorphismus $\varphi : \mathrm{T}\, M \to M \times \mathbb{R}^n$ mit $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \varphi$ gibt,dessen Einschränkung auf $\pi^{-1}(p)$ für jedes $p \in M$ ein Isomorphismus ist, wenn n punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf M existieren.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass es 3 punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf S^3 gibt.

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr.

[1] $\Gamma(M, \mathrm{T}\, M)$ ist die Menge der glatten Vektorfelder auf M.