Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. W. Tuschmann
Dipl.-Math. M. Herrmann

Differentialgeometrie **WS 2013/14**

Übungsblatt 7

Aufgabe 1
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$- Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass das äußere Produkt $. \wedge . : \Lambda^k V \times \Lambda^l V \to \Lambda^{k+l} V$ assoziativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $v^{*1}, \dots, v^{*k} \in V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt:

$$v^{*1} \wedge \dots \wedge v^{*k}(v_1, \dots, v_k) = \det(v^{*i}(v_j))$$

Aufgabe 2

(a) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Lieklammer i.a. nicht $C^\infty(M)$-bilinear ist.

Aufgabe 3
Berechnen Sie die Lieklammern der folgenden drei Vektorfelder auf $M = \mathbb{R}^3$:

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aufgabe 4
Es seien auf $\mathbb{R}^2$ die Vektorfelder $X := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ und $Y := -2y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial y}$ gegeben.

(a) Skizzieren Sie die Vektorfelder.

(b) Bestimmen Sie für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ die Integralkurven von X und Y durch (x_0, y_0).

Abgabe bis zum kommenden Freitag um 15 Uhr.