

Übungsblatt 9

Aufgabe 1

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand und N eine glatte Mannigfaltigkeit mit oder ohne Rand. Zeigen Sie: Das Produkt $M \times N$ ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand und für den Rand gilt $\partial(M \times N) = M \times \partial N$.

Welche Probleme könnten auftreten, wenn M und N beide nichtleeren Rand haben?

Aufgabe 2

Es seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten, $\eta \in \Omega^q(M)$, $\omega \in \Omega^l(M)$ und $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) $\eta \wedge \omega = (-1)^{q \cdot l} \omega \wedge \eta$;
- (b) $d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^q \eta \wedge d\omega$;
- (c) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$;
- (d) $f^*(\eta \wedge \omega) = f^*\eta \wedge f^*\omega$.

Aufgabe 3

Es seien M eine glatte Mannigfaltigkeit und ω eine glatte k -Form auf M . Zeigen Sie, dass für alle glatten Vektorfelder X_1, \dots, X_{k+1} auf M die folgende Identität gilt:

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

wobei ein Hut das Auslassen des entsprechenden Vektorfeldes kennzeichnet.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!