Aufgabe 7.1 (b)

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Für $v^{*1}, \dots, v^{*k} \in V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt:

$$v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k}(v_1, \dots, v_k) = \det(v^{*i}(v_j))$$

Beweis. Per Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Behauptung offensichtlich wahr.

$k \to k+1$: Für $1 \le l \le k+1$ sei $\sigma_l \in \mathrm{S}_{k+1}$ definiert durch

$$\sigma_l(i) = \begin{cases} i & \text{für } i < l \\ i+1 & \text{für } l \le i \le k \\ l & \text{für } i = k+1 \end{cases} .$$

Ist $\tau_{i,j}$ die Transposition, die i und j vertauscht, so gilt $\sigma_l = \tau_{l,l+1} \circ \cdots \circ \tau_{k-1,k} \circ \tau_{k,k+1}$. Also ist σ_l ein Produkt aus $k+1-l$ Transpositionen und somit $\mathrm{sgn}(\sigma_l) = (-1)^{k+1-l} = (-1)^{k+1+l}$. Wie in Teil (a) gilt für jedes $\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}$ mit $\sigma(k+1) = l$, dass

$$\begin{aligned} &\mathrm{sgn}(\sigma)\ (v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\ v^{*k+1}(v_{\sigma(k+1)}) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma_l)\ (v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k})(v_{\sigma_l(1)}, \dots, v_{\sigma_l(k)})\ v^{*k+1}(v_{\sigma_l(k+1)}) \end{aligned}$$

und es gibt jeweils $k!$ solcher Permutationen. Somit ist

$$\begin{aligned} &v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k+1}(v_1, \dots, v_{k+1}) \\ &= ((v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k}) \wedge v^{*k+1})(v_1, \dots, v_{k+1}) \\ &= \tfrac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\ (v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\ v^{*k+1}(v_{\sigma(k+1)}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} \tfrac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{S}_{k+1} \\ \sigma(k+1)=l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\ (v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k})(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\ v^{*k+1}(v_{\sigma(k+1)}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} \mathrm{sgn}(\sigma_l)\ (v^{*1} \wedge \cdots \wedge v^{*k})(v_{\sigma_l(1)}, \dots, v_{\sigma_l(k)})\ v^{*k+1}(v_{\sigma_l(k+1)}) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} (-1)^{k+1+l}\ \det\big((v^{*i}(v_{\sigma(j)}))_{i,j=1,\dots,k}\big)\ v^{*k+1}(v_{\sigma_l(k+1)}) \\ &= \det\big((v^{*i}(v_j))_{i,j=1,\dots,k+1}\big) \end{aligned}$$

nach dem Determinantenentwicklungssatz. $\square$