Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Es seien $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück und $V \subset U$ eine beschränkte messbare Menge. Der **Flächeninhalt** des Flächenstückes $A = x(V)$ ist dann definiert durch

$$\mathrm{vol}(A) = \int_V \|x_{u^1} \times x_{u^2}\| \, \mathrm{d}u = \int_V \sqrt{\det(g_{ij})} \mathrm{d}u$$

(1) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt.

Hinweis: Benutzen Sie die Transformationsformel für die erste Fundamentalform unter Parametertransformationen.

(2) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks auf einer Sphäre vom Radius r mit dem Nordpol und zwei Punkten auf dem Äquator als Eckpunkten.

Hinweis: In der Parametrisierung $x(\phi, \rho) = r(\cos\phi \sin\rho, \sin\phi \sin\rho, \cos\rho)$ sind geeignete Koordinatenlinien die Kanten des Dreiecks.

Aufgabe 2.
Es sei die parametrisierte Fläche

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto \left(u^1, 2u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2\right).$$

(1) Berechnen Sie für jeden Normalschnitt im Punkt $x_0 = x(0,0)$ eine Parametrisierung und deren Krümmung.

(2) Bestimmen Sie diejenigen Einheitsvektoren in der Tangentialebene der Fläche x in $x_0 = x(0,0)$, für welche die Krümmung des zugehörigen Normalschnittes im Punkt x_0 gleich Null ist.

Aufgabe 3.
Gegeben sei die Sattelfläche mit den beiden Parametrisierungen

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, &\qquad (u^1, u^2) \mapsto (u^1 + u^2, u^1 - u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2), \\ \tilde{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, &\qquad (v^1, v^2) \mapsto (v^1, v^2, v^1 \cdot v^2). \end{aligned}$$

Berechnen Sie für beide Parametrisierungen die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung.