Karlsruher Institut für Technologie

**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

# Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

## Übungsblatt 11

**Aufgabe 1.**
Gegeben sei die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (y_1, y_2) \mapsto \frac{1}{2} \cdot y_1^2 - y_1 y_2 + \frac{1}{2} \cdot y_2^2$$

und ihre Graphenabbildung $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, \varphi(u^1, u^2))$. Bestimmen Sie für $x$ im Punkt $(1, -1)$

(1) den Einheitsnormalenvektor $N$,

(2) die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform,

(3) die Hauptkrümmungen, Gaußsche und mittlere Krümmung
(zur Selbstkontrolle: $H(1, -1) = 1/27$),

(4) für die Tangentialebene $\mathrm{T}_{(1,-1)}\, x$ eine ONB aus Hauptkrümmungsrichtungen.

**Aufgabe 2.**
Es sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\alpha(t), 0, \beta(t))^T$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\alpha(t) > 0$ für alle $t \in I$ und

$$x\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\alpha(u^1) \cos u^2, \alpha(u^1) \sin u^2, \beta(u^1))$$

die zugehörige Rotationsfläche.

(1) Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung von $x$ durch

$$K(u^1, u^2) = -\frac{\alpha''(u^1)}{\alpha(u^1)}$$

gegeben ist.

(2) Einen interessanten Spezialfall liefert die *Traktrix* oder *Schleppkurve*: Die Strecke $[0, 1] \times \{0\}$ im $\mathbb{R}^2$ werde an ihrem linken Endpunkt entlang der Halbachse $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ "abgeschleppt". Der rechte Endpunkt beschreibt dabei die sogenannte *Traktrix*, für deren Bogenlängenparametrisierung $c\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\alpha(t), \beta(t))^T$ gilt:

$$c(t) + c'(t) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+, \quad t \geq 0 \text{ (Skizze!)}.$$

Bestimmen Sie die Gaußkrümmung der durch $\tilde{c}\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\alpha(t), 0, \beta(t))^T$ definierten Rotationsfläche, der sogenannten *Pseudosphäre*.