Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

# Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.**
Es sei $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole der parametrisierten Fläche

$$x: U \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, f(u^1, u^2)).$$

**Aufgabe 2.**
Wir betrachten den Zylinder mit der Parametrisierung

$$x\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (r\cos u^1, r\sin u^1, 2u^2).$$

(1) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole des Zylinders.

(2) Geben Sie die Differentialgleichungen für Geodätische auf dem Zylinder an.

(3) Bestimmen Sie alle Geodätische durch den Punkt $x(0,0) = (r,0,0)$.

(4) Berechnen Sie für jede Geodätische $c\colon\ \mathbb{R} \to x(\mathbb{R}^2)$ mit $c(0) = x(0,0) = (r,0,0)$ die Funktion $\theta\colon\ \mathbb{R} \to [0,\pi]$, die jedem $t \in \mathbb{R}$ den Winkel $\theta(t)$ von $c$ mit dem Breitenkreis durch den Punkt $c(t)$ zuordnet.

**Aufgabe 3.**
Gegeben sei die Zylinderfläche mit der Parameterdarstellung

$$x\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\ln u^1, u^1, u^2)$$

(1) Bestimmen Sie die Fundamentalgrößen erster Art und die Christoffelsymbole erster Art von $x$. Geben Sie die Differentialgleichung der geodätischen Linien an und zeigen Sie, daß die Parameterlinien geodätische Linien sind.

(2) Zeigen Sie, daß die übrigen geodätischen Linie von $x$ durch

$$u^2 = u_0^2 + c\left(\sqrt{1+(u^1)^2} - \ln\frac{1+\sqrt{1+(u^1)^2}}{u^1}\right)$$

mit Konstanten $u_0^2$ und $c > 0$ gegeben sind.

(3) Weisen Sie nach, daß die geodätischen Linien aus (2) die Erzeugenden ($u^2$-Linien) unter dem festen Winkel $\arccos\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$ schneiden.

(4) Ermitteln Sie diejenige geodätische Linie, die durch den Punkt $x(1,0)$ geht und dort die $u^2$-Linie unter einem Winkel von $45°$ schneidet.