Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.
Für ein festes $r > 0, c \in \mathbb{R}$ und $l := \sqrt{c^2 + r^2}$ sei die vektorwertige Funktion

$$x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x(t) := \left(r\cos\left(\frac{t}{l}\right), r\sin\left(\frac{t}{l}\right), c\,\frac{t}{l}\right)$$

gegeben. Berechnen Sie für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

(1) $x'(t)$ und $x''(t)$,
(2) $y(t) := \frac{x''(t)}{\|x''(t)\|}$,
(3) $z(t) := x'(t) \times y(t)$,
(4) $\langle y(t), z'(t)\rangle$.

Aufgabe 2.
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x, y\colon I \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare vektorwertige Funktionen.

(1) Beweisen Sie die in der Vorlesung genannte Produktregel für das Vektorprodukt
$$(x \times y)'(t) = x'(t) \times y(t) + x(t) \times y'(t).$$
(2) Zeigen Sie, dass aus $\|x(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ folgt, dass
$$x'(t) \perp x(t) \text{ für alle } t \in I.$$
(3) Berechnen Sie die Ableitung der reellwertigen Funktion
$$\|x\|\colon I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \|x(t)\|.$$

Hinweis zu (2). Berechnen Sie die Ableitung von $\|x(t)\|^2$ mit Hilfe der Produktregel für das Skalarprodukt.

Aufgabe 3.
Gegeben seien die folgenden zwei vektorwertigen Funktionen in zwei bzw. einer Variablen

$$F\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x - 4y^2 \\ -3x + y \\ 2x^2 + 2y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J_F(x, y)$, sowie deren Rang in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(2) Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F \circ \phi)(t)$ sowohl durch Einsetzen von ϕ in die Abbildungsvorschrift von F, als auch mit Hilfe der in der Vorlesung angegebenen verallgemeinerten Kettenregel.