Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1.
Rollt ein Kreis K vom Radius $r > 0$ auf einer Geraden, so beschreibt ein fester Punkt auf K eine ebene Kurve, die *Zykloide* genannt wird.

(1) Bestimmen Sie eine Parametrisierung

$$x\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$$

für eine solche Zykloide, indem Sie als Gerade die x_1-Achse, einen in der (x_1, x_2)-Ebene liegenden Kreis und als Startpunkt den Ursprung wählen.

(2) Bestimmen Sie den Tangentenvektor der Zykloide x in jedem Punkt $x(t)$ und berechnen Sie die Länge von x.

Hinweise: Sollten Sie in Aufgabenteil (1) zu keinem Ergebnis gelangt sein, dürfen Sie für die Bearbeitung von Aufgabenteil (2) die folgende parametrisierte Kurve benutzen:

$$x\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (1 + t - \sin t - \cos t, 1 - t + \sin t - \cos t).$$

Sie können außerdem die Gleichung $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$ verwenden.

Aufgabe 2.
Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Kurven regulär sind und berechnen Sie jeweils ihre Länge sowie den Tangenteneinheitsvektor in jedem Punkt.

(1) *Kettenlinie:*

$$x\colon [-8, 8] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (t, \cosh t).$$

Diese Kurve erhält man als Gleichgewichtslage eines an zwei Punkten befestigten (idealen) Seiles (dies wurde 1690 von Johann Bernoulli entdeckt).

(2) *Traktrix:*

$$x\colon (0, 8) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \Big(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}\Big).$$

Aufgabe 3.
Geben Sie für folgende Kurven $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ die Bogenlänge $s(t) := \int_a^t |x'(u)|\, du$ an und parametrisieren Sie die Kurven nach Bogenlänge:

(1) $x\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \Big(1 + \cosh t, \cos t, 1 - \sin t\Big),$

(2) $x\colon [0, 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \Big(\frac{1}{2}t^2, 2t, \frac{4}{3}t^{3/2}\Big).$

Abgabe bis Donnerstag, den **10. November**, in der Vorlesung; die Besprechung findet in der Übung am 11. November statt.