Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden parametrisierten Kurven singuläre Punkte besitzen. Berechnen Sie ihre Längen und bestimmen Sie jeweils den Tangentenvektor sowie die Krümmung in allen regulären Punkten.

(1) $x\colon [1, e^3] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \left(\frac{t^3}{3}, \ln(t), \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}\right)$

(2) $x\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (3\cos(t), 3\sin(t), 4t)$

Aufgabe 2.
Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Kurve. Die Kurve

$$x\colon I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, f(t), 0),$$

heißt dann *Graph* von f.

(1) Bestimmen Sie für alle $t \in I$ den Tangentialvektor $T(t)$ und den Hauptnormalenvektor $N(t)$.

(2) Berechnen Sie die Krümmung in jedem Punkt von x.

Zusatz. Optional können Sie auch den Fall, dass $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist, betrachten, in dem der Graph durch die Kurve $x\colon I \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, f_1(t), f_2(t))$ gegeben wird.

Aufgabe 3.
Gegeben sei die hyperbolische Schraubenlinie

$$x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (r\cosh t, r\sinh t, rt)$$

vom Radius $r > 0$.

(1) Bestimmen Sie für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Hesse-Normalform der Schmiegebene $E(t_0)$ im Punkt $x(t_0)$.

(2) Geben Sie eine Parametrisierung

$$y\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$$

des Krümmungskreises von x im Punkt $x(0)$ an.