Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1.
Gegeben sei die Kurve

$$x\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \Big(\ln(t), \frac{t}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{t\sqrt{2}}\Big).$$

(1) Berechnen Sie die Krümmung und Torsion von x.

(2) Zeigen Sie, dass x eine Böschungslinie ist, indem Sie für jeden Punkt $x(t)$ mit $t \in [1,\infty)$ den Winkel zwischen der Tangente von x und der Geraden durch $x(t)$ mit Richtungsvektor $(0,1,1)$ berechnen.

(3) Zeigen Sie, dass x durch eine geeignete euklidische Bewegung auf die hyperbolische Schraubenlinie

$$y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r\cosh(t), r\sinh(t), rt)$$

mit geeignetem Radius $r > 0$ abgebildet werden kann und geben Sie diesen Radius an.

Hinweis: Für den letzten Aufgabenteil ist folgende Formel hilfreich:

$$\frac{(t^2+1)^2}{t^2} = \frac{(t^2-1)^2+4t^2}{t^2} = \frac{(t^2-1)^2}{t^2} + 4.$$

Aufgabe 2.
Es sei die ebene Kurve

$$x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cosh(t), 5\sinh(t))$$

gegeben.

(1) Bestimmen Sie in jedem Kurvenpunkt $x(t)$ den Tangentialvektor $T(t)$, den positiv orientierten Normaleneinheitsvektor $N^+(t)$ sowie die geodätische Krümmung $\kappa_g(t)$.

(2) Geben Sie eine implizite Darstellung für die Spur der Kurve x an und berechnen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} h$ der entsprechenden Funktion $h\colon U \to \mathbb{R}$ für $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

(3) Berechnen Sie die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \langle T(t), \operatorname{grad} h(x(t))\rangle$.

Aufgabe 3.
Für $c \in \mathbb{R}$ sei eine ebene Kurve durch die Polargleichung

$$r(\varphi) = e^{c\varphi}, \quad \varphi \geq 0$$

gegeben.

(1) Finden Sie die Parametrisierung der gegeben Kurve in der Form

$$x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto (x_1(\varphi), x_2(\varphi)).$$

(2) Zeigen Sie, dass für $\varphi \geq 0$ der Winkel $\angle(x(\varphi), x'(\varphi))$ unabhängig von φ ist.

(3) Berechnen Sie die geodätische Krümmung $\kappa_g(\varphi)$ in allen Punkten $x(\varphi)$.