Karlsruher Institut für Technologie

**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

# Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

# Übungsblatt 7

**Aufgabe 1.** (1) Geben Sie für die ebenen Kurve

$$x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (4 - 8\cos^2 t + \cos t, 2\cos t)$$

sowohl eine explizite, als auch eine implizite Darstellung an.

(2) Durch $x_2 = x_1^2$ wird explizit eine Parabel in $\mathbb{R}^2$ dargestellt. Zeigen Sie dass die Evolute dieser Parabel die implizite Darstellung $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_2 - \frac{1}{2})^3 - \frac{27}{16} y_1^2 = 0\}$ besitzt.

**Aufgabe 2.**
Erinnern Sie sich daran, dass die sogenannte *Zykloide* (die ja bereits Gegenstand der Aufgabe 1 auf dem Übungsblatt 3 war) einen festen Punkt auf einem Kreis vom Radius $r > 0$ beschreibt, der die $x_1$-Achse entlang rollt. Eine Parametrisierung ist durch

$$x\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto r(t - \sin t, 1 - \cos t)$$

gegeben.

(1) Berechnen Sie in allen regulären Punkten den positiv orientierten Normaleneinheitsvektor $N^+(t)$ und die geodätische Krümmung $\kappa_g$.

(2) Zeigen Sie, dass die Evolute von $x$ selbst eine Zykloide ist und skizzieren Sie beide Kurven.

**Aufgabe 3.**
Bestimmen Sie sämtliche singulären Punkte der folgenden implizit dargestellten Kurven und geben deren Typ[1] an.

(1) $h_1(x_1, x_2) = x^2 - y^2$

(2) $h_2(x_1, x_2) = y^2 + x^2 - x^3$

(3) $h_3(x_1, x_2) = x^4 + 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4$ für $a > 0$.

[1] Doppelpunkt, Einsiedlerpunkt, Spitze oder Berührungspunkt