Karlsruher Institut für Technologie

**Fakultät für Mathematik**
**Institut für Algebra und Geometrie**

Dr. Sebastian Grensing
Jan-Bernhard Kordaß M.Sc.

# Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

# Übungsblatt 8

**Aufgabe 1.**
Gegeben sei die ebene Kurve mit der Parametrisierung

$$x\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (2\sin t, \cos t).$$

(1) Skizzieren Sie die Kurve und zeigen Sie, dass es sich um eine einfache und geschlossene Kurve handelt.

(2) Finden Sie eine implizite Darstellung für $x$.

(3) Berechnen Sie in jedem Punkt $x(t)$ den Tangentialvektor und den positiv orientierten Normaleneinheitsvektor. Ist die Kurve positiv orientiert?

(4) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \kappa_g(t) \cdot \|x'(t)\| \,\mathrm{d}\, t.$$

**Aufgabe 2.**
Es sei $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, $s \mapsto c(s)$ eine reguläre, nach Bogenlange parametrisierte Kurve, und

$$x\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto c(u^1) + u^2 c'(u^1)$$

die zugehörige sogenannte Tangentenfläche.

(1) Zeigen Sie, dass $x$ genau in den Punkten mit $c''(u^1) \neq 0$ und $u^2 \neq 0$ regulär ist.

(2) Zeigen Sie, dass in den regulären Punkten von $x$ für den Vektor

$$n(u^1, u^2) := \frac{x_{u^1} \times x_{u^2}}{\|x_{u^1} \times x_{u^2}\|}$$

und den Binormalenvektor $B(s)$ der Kurve $c$ folgender Zusammenhang besteht:

$$n(u^1, u^2) = -B(u^1)\,.$$

**Aufgabe 3.**
Eine *Drehfläche* entsteht, indem man eine ebene Kurve um eine Achse dreht. Im Folgenden betrachten wir eine differenzierbare Kurve

$$c\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto (c_1(t), 0, c_3(t)),$$

in der $(x_1, x_3)$-Ebene und drehen diese um die $x_3$-Achse. Die hierdurch konstruierte Fläche besitzt dann eine Parametrisierung der Form

$$x\colon [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}^3 \quad (u^1, u^2) \mapsto (c_1(u^2)\cos u^1, c_1(u^2)\sin u^1, c_3(u^2)).$$

Zeigen Sie, dass diese Parametrisierung regulär ist, falls die Kurve $c$ regulär ist und $c_1(t) > 0$ für alle $t \in I$ gilt.