

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie (WS 2016)

Übungsblatt 9

Aufgabe 1.

Gegeben sei mit $U = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ das parametrisierte Flächenstück

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 - u^2 \sin u^1, \sin u^1 + u^2 \cos u^1, u^2)$$

sowie die Raumkurve

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (\sqrt{2}(\frac{1}{2} - t), \sqrt{2}(\frac{1}{2} + t), 2t).$$

- (1) Zeigen Sie, dass x eine Regelfläche ist und geben Sie ihre Basiskurve sowie ihre Richtungskurve an.
- (2) Finden Sie eine implizite Darstellung der Fläche x , indem Sie die Parameter u^1 und u^2 eliminieren.
- (3) Zeigen Sie, dass die Kurve c eine Flächenkurve ist und geben Sie die Kurve

$$u: \mathbb{R} \rightarrow U, \quad t \mapsto (u^1(t), u^2(t))$$

im Definitionsbereich U der Fläche x an, für die $c(t) = x(u(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

- (4) Schreiben Sie für $t \in \mathbb{R}$ den Tangentenvektor von c an $c(t)$ als Linearkombination der partiellen Ableitungen x_{u^1} und x_{u^2} von x im Punkt $x(u(t)) = c(t)$.

Aufgabe 2.

Wir betrachten das parametrisierte Flächenstück

$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u = (u^1, u^2) \mapsto (u^1 - u^2, u^1 + u^2, (u^1)^2 - (u^2)^2).$$

- (1) Bestimmen Sie den Rang der Jacobi-Matrix $J_x(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Bestimmen Sie die Parameterlinien und überprüfen Sie, ob die Parameterlinien ebene Kurven sind.
- (3) Berechnen Sie die Krümmung der Parameterlinien und geben Sie die Punkte mit maximaler und minimaler Krümmung an.
- (4) Zeigen Sie, dass es sich bei obiger Parametrisierung um einen hyperbolischen Paraboloiden (Sattelfläche) handelt.

Gegeben sei weiter das parametrisierte Flächenstück

$$\tilde{x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \tilde{u} = (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) \mapsto (\tilde{u}^1, \tilde{u}^2, \tilde{u}^1 \cdot \tilde{u}^2).$$

- (5) Zeigen Sie, dass es sich bei der obigen Parametrisierung um eine orientierungstreue Umparametrisierung der Sattelfläche x handelt.
- (6) Bestimmen Sie für beide Parametrisierungen ein Gaußsches begleitendes Dreibein.