Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es seien p, q, r, s Punkte auf einer Geraden L.

a) Zeigen Sie: Liegt q zwischen p und s und liegt ferner r zwischen q und s, so liegt auch r zwischen p und s.

b) Zeigen Sie: Sind p und q verschieden, so liegen unendlich viele Punkte zwischen p und q.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei L eine Gerade und $p \in L$ ein Punkt auf L. Zeigen Sie, dass die Beziehung „q_1 liegt auf derselben Seite des Punktes p wie q_2“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\{q \in L | q \neq p\}$ definiert.

Definition 1 Es sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Wirkung von G auf X ist ein Homomorphismus $\alpha\colon G \to \mathcal{S}(X)$ von G in die Gruppe der bijetkiven Selbstabbildungen von X bezeichnet mit $\mathcal{S}(X)$.

Äquivalent kann man eine Wirkung von G auf X definieren als eine Abbildung $\beta\colon G \times X \to X$, sodass $\beta(1_G, x) = x$ und $\beta(g \cdot h, x) = \beta(g, \beta(h, x))$. Schreibt man $g \cdot x := \beta(g, x)$, so schreiben sich diese Bedingungen als $1_G \cdot x = x$ und $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei G eine Gruppe.

a) Es sei $X := G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G \times X \to X$ gegeben durch $(g, x) \mapsto g \cdot x \cdot g^{-1}$ eine Gruppenwirkung definiert.

b) Es sei X die Menge aller Teilmengen von G. Für $g \in G$ und $S \in X$ (also $S \subset G$) sei $gSg^{-1} := \{gsg^{-1} | s \in S\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G \times X \to X$ gegeben durch $(g, S) \mapsto g \cdot S \cdot g^{-1}$ eine Gruppenwirkung definiert.

c) Es sei X eine Menge und $\alpha\colon G \to \mathcal{S}(X)$ eine Wirkung. Zeigen Sie, dass $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$, also dass $\alpha(g^{-1})$ die inverse Abbildung von $\alpha(g)$ ist.

Beachten Sie: Es gibt noch eine zweite Seite.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Erinnerung: $O(n)$ bezeichnet die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen, für die $A^t A = \mathrm{Id}_{n\times n}$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass $O(n)$ eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ bildet.

b) Bestimmen Sie die Orbiten der Wirkung $O(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A, v \mapsto A \cdot v$.

Tipp zu b): Zeigen Sie zunächst, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$ gilt, dass $\|A \cdot v\| = \|v\|$ und verwenden Sie später das Gram-Schmidt-Verfahren.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die blauen Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!