Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle u, v\rangle_p = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

b) Es sei $(N, \langle ., .\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $M \subset N$ eine Untermannigfaltigkeit. Für $p \in M$ und $u, v \in T_pM \subset T_pN$ definieren wir $\langle u, v\rangle_p^M := \langle u, v\rangle_p$. Zeigen Sie, dass $(M, \langle ., .\rangle^M)$ wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2

Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist in Polarkoordinaten gegeben durch $(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$.

a) Zeigen Sie: $\frac{\partial}{\partial r} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi} = -r\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + r\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial y}$

b) Es bezeichne $ds^2 = dx^2+dy^2$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie $ds^2(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi})$, $ds^2(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial r})$ und $ds^2(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})$.

c) Leiten Sie eine Formel für ds^2 in Polarkoordinaten her.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei S eine Fläche mit Koordinatensystem (x, y) bei $p \in S$. Die zugehörigen Tangentialvektoren werden wie gewohnt mit $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ bezeichnet. Wir definieren lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} dx\colon T_pS &\to \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} dy\colon T_pS &\to \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} &\mapsto 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Falls (x', y') ein weiteres Koordinatensystem bei p ist, so gilt:

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy \\ dy' &= \frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy \end{aligned}$$

Anmerkung: Mit dieser Notation kann man die Schreibweise $ds^2 = dx^2 + dy^2$ wie folgt interpretieren:

$$ds^2(u, v) = dx^2(u, v) + dy^2(u, v) := dx(u)\cdot dx(v) + dy(u)\cdot dy(v).$$

Zusammen mit den in dieser Aufgabe hergeleiteten Formeln erhält man eine alternative Berechnungsmöglichkeit für Aufgabe 2.

Aufgabe 4
Es sei in einer Koordinatenkarte eine Riemannsche Metrik auf einer Fläche gegeben durch

$$ds^2 = a \cdot dx^2 + 2b \cdot dxdy + c \cdot dy^2$$

Interpretieren Sie die folgenden Bedingungen in Termen der Koeffizientenfunktionen a, b, c:

a) Für $k, k' \in \mathbb{R}$ sind die Koordinatenkurven $\gamma_y(t) = (k, t)$ und $\gamma_x(t) = (t, k')$ orthogonal.

b) Die Koordinatenkurven bilden in jedem Punkt den Winkel $\frac{\pi}{4}$.

c) Der von der Metrik definierte Flächeninhalt stimmt mit dem üblichen Flächeninhalt $dxdy$ überein.

Abgabe bis 14.01.2020. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!