Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei ein Dreieck bestehend aus Großkreissegmenten auf $S^2(R)$, der Sphäre vom Radius R gegeben. Die Innenwinkel des Dreiecks seien gegeben durch α, β und γ. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt

$$F = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

Hinweis: Betrachten Sie durch jeweils zwei Großkreise berandete Zweiecke und erinnern Sie sich daran, dass der Flächeninhalt der Kugeloberfläche durch $4\pi R^2$ gegeben ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei $z \mapsto a\overline{z} + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$ eine orientierungsumkehrende Isometrie von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Finden Sie Bedingungen für a und b, die festlegen, ob die Isometrie eine Spiegelung oder Gleitspiegelung ist und bestimmen Sie in beiden Fällen die Spiegelachsen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $\mathcal{B} = \{(v_1, \dots, v_n) \text{ Basis von } \mathbb{R}^n\}$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}$ ist und bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen.

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (v'_1, \dots, v'_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ mit } A \cdot v_i = v'_i \text{ für alle } i \text{ und } \det(A) > 0$$

Eine linearer Isomorphismus A heißt *orientierungserhaltend*, falls für jede Basis $(v_1, \dots, v_n)$ gilt, dass $(A(v_1), \dots, A(v_n)) \sim (v_1, \dots, v_n)$. A heißt *orientierungsumkehrend*, falls für jede Basis $(v_1, \dots, v_n)$ gilt, dass $(A(v_1), \dots, A(v_n)) \not\sim (v_1, \dots, v_n)$.

b) Geben Sie jeweils einen orientierungserhaltenden und einen orientierungsumkehrenden Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ an. Zeigen Sie, dass für jeden orientierungsumkehrenden Isomorphismus A gilt, dass $A \circ A$ orientierungserhaltend ist.

c) Ein Diffeomorphismus $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt orientierungserhaltend, falls für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $D_p f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist. Zeigen Sie, dass Drehungen und Translationen in $\mathbb{R}^2$ orientierungserhaltend und dass Spiegelungen und Gleitspiegelungen in $\mathbb{R}^2$ orientierungsumkehrend sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es sei $p = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ für $\varphi \in [0, 2\pi)$.

a) Zeigen Sie: Ist $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Spiegelung an der Gerade durch den Ursprung und durch p, so ist A durch Multiplikation mit folgender Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Schreiben Sie eine Rotation um den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ mit dem Winkel φ als Komposition von zwei Spiegelungen und folgern Sie, dass jede Isometrie von $\mathbb{R}^2$, die $0 \in \mathbb{R}^2$ fixiert, sich als Komposition von höchstens 2 Spiegelungen darstellen lässt.

c) Zeigen Sie, dass jede Isometrie von $\mathbb{R}^2$ sich als Komposition von höchstens 3 Spiegelungen darstellen lässt.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!