Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Dr. Georg Frenck

Elementare Geometrie

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (5 Punkte)
In dieser Aufgabe berechnen Sie die Geodätischen von S^2.

a) Es sei S eine Fläche, $f\colon S \to S$ eine Isometrie und $\gamma\colon [0,\varepsilon] \to S$ eine Geodätische. Zeigen Sie, dass $F \circ \gamma$ wieder eine Geodätische ist.

b) Zeigen Sie, dass es für je 2 Punkte $x, y \in S^2$ eine Isometrie $f\colon S^2 \to S^2$ gibt, die den Großkreis durch x und y in sich selbst abbildet.

c) Folgern Sie, dass alle Geodätischen auf Großkreisen liegen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es sei $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - cb = 1$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\psi(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ invers zu ϕ ist.

b) Erklären Sie, warum man ohne Einschränkung annehmen kann, dass $c \leq 0$ gilt.

Von nun an gelte $c \leq 0$.

c) Geben Sie ein $\mu > 0$ an, sodass im Fall $c \neq 0$ gilt: $\phi(z) = \frac{a}{c} + \frac{\mu}{cz+d}$.

d) Schreiben Sie $\phi(z)$ als Komposition von Abbildungen der folgenden Form:

$$M_\lambda\colon z \mapsto \lambda \cdot z \text{ für } \lambda > 0, \qquad A_\mu\colon z \mapsto z + \mu \text{ für } \mu \in \mathbb{R}, \qquad I\colon z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

Es folgt, dass die Abbildung ϕ eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Es sei $\mathbb{H}^2 := \{x \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ versehen mit der Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Zeigen Sie: Die Abbildung $f\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ gegeben durch $z \mapsto -\frac{1}{z}$ ist eine Isometrie.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} \mathbb{P}GL_n(\mathbb{K}) &= GL_n(\mathbb{K})/\sim & \quad A \sim B &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}\colon A = \lambda \cdot B \\ \mathbb{P}SL_n(\mathbb{K}) &= SL_n(\mathbb{K})/\sim & \quad A \sim B &\iff \exists \lambda \in \{\pm 1\}\colon A = \lambda \cdot B \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{P}SL_n(\mathbb{C})$ ist isomorph zu $\mathbb{P}GL_n(\mathbb{C})$.

b) $\mathbb{P}SL_n(\mathbb{R})$ ist genau dann isomorph zu $\mathbb{P}GL_n(\mathbb{R})$, wenn n ungerade ist.

Abgabe bis nächsten Dienstag. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in den blauen Einwurfkasten im Foyer von Gebäude 20.30.

Bitte geben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und den Namen Ihres Tutors an!